

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS A.C.

CIMAT

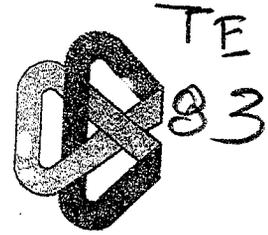
CARTAS DE CONTROL CUSUM: SU CONSTRUCCION,
APLICACION Y PROPIEDADES.

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERIA DE LA CALIDAD
Presenta

GUSTAVO A. TORRES LOZANO

GUANAJUATO, GTO. 1995.



AGRADECIMIENTOS
CIMAT
BIBLIOTECA

Agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas por su gran apoyo en mis estudios de maestría.

Agradezco por su valiosa ayuda a mi asesor M. en C. Román de la Vara Salazar y a mis sinodales M. en C. Jorge Domínguez Domínguez y Dr. Víctor M. Pérez-Abreu Carrión.

C I M A T
BIBLIOTECA

015944

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	1
ANTECEDENTES	4
CAPITULO I Introducción a las Cartas de Control Estadístico	6
1.1 Introducción	6
1.1.1 Teoría de las cartas de control	8
1.1.2 Longitud de corrida promedio	15
1.1.3 Pruebas adicionales para las cartas \bar{X}	17
CAPITULO II Cartas CUSUM	21
2.1 Introducción	21
2.2 Características de las cartas CUSUM	22
2.3 Parámetros de la carta CUSUM	27
2.4 Construcción de las cartas CUSUM	28
2.4.1 Metodología para la construcción de las cartas CUSUM	28
2.4.2 Metodología propuesta para la construcción de las cartas CUSUM	31

2.5	Construcción de las cartas CUSUM numéricas	34
CAPITULO III Comparación entre cartas CUSUM y \bar{x}		39
3.1	Introducción	39
3.2	Comparación de las cartas Shewhart y CUSUM	40
CAPITULO IV Revisión Bibliográfico		59
4.1	Introducción	59
4.2	Análisis bibliográfico	60
4.2.1	Page (1961)	60
4.2.2	Goldsmith y Whtfield (1961)	61
4.2.3	Ewan (1963)	62
4.2.4	Bowker y Lieberman (1972)	65
4.2.5	Lucas (1976)	68
4.2.6	Feigenbaum (1983)	69
4.2.7	Wadsworth, Stephens y Kenneth (986)	69
4.2.8	Woodall (1986)	73
4.2.9	Peter Jhon (1990)	73
4.2.10	Montgomery (1991)	75
4.2.11	Duncan (1991)	85
CAPITULO V Resumen y Conclusiones		89
5.1	Introducción	89
5.2	Selección de la carta de control	89
5.3	Características de las cartas CUSUM	92
5.3.1	Ventajas de las cartas CUSUM	92

5.3.2	Desventajas de las cartas CUSUM	93
5.4	Construcción de las cartas CUSUM máscara-V	93
5.5	Conclusiones generales	94
BIBLIOGRAFIA		96

INTRODUCCION

En la actualidad la sola palabra **Calidad** a tomado todo un significado, el cual pocas personas tienen bien definido. La mayoría lo conciben de acuerdo a la experiencia obtenida en el área, que desde luego es poca debido a que la cultura de la calidad en nuestro país ha sido pobre, con algunas excepciones. Otras personas conciben el significado de la calidad basados en alguna capacitación, la mayoría de las veces deficiente, que les dá un concepto erróneo de todo lo que debe de encontrarse dentro del concepto de Calidad. Existen también gran cantidad de personas que estando conscientes de no dominar el concepto hacen de él un instrumento de lucro, lo cual es muy perjudicial para quién seriamente está involucrado en el área. Si un Industrial se topa con uno de tantos charlatanes de la calidad y éste logra embaucarlo y lo defrauda, dicho industrial no deseará saber nada más sobre Calidad.

Y es que la Calidad debe ser analizada tal como lo que es: un sistema para administrar la empresa con un enfoque hacia la completa satisfacción del consumidor. Esto involucra a todos los elementos de la empresa incluyendo algo que todos los comerciantes de la calidad olvidan, que es la parte técnica y lo más probable no es que la olviden, sino que no están capacitados para trabajar con ella y por ello prefieren aparentar poco interés en esta parte. Dicen estar enfocados a los conceptos filosóficos

de autores tales como Deming o Juran, aduciendo que lo realmente importante es implantar primero tales filosofías en una empresa, pero ahí está su primer error y muestra de ignorancia, ya que dichos autores como Deming, quien era estadístico, siempre puntualizó en sus obras la gran importancia de la estadística dentro de la calidad. Incluso en el libro La Ruta Deming, escrito por W.W. Scherkenbach y revisado y corregido por Deming, se sugiere que todo director general de empresa debe tener como colaborador directo a un experto estadístico que siempre analice las decisiones del Director y dé su punto de vista al respecto. Así, de acuerdo a Deming el conocimiento técnico estadístico tiene gran importancia dentro de la administración de una empresa. Conocer los elementos de un sistema de calidad implica conocer las técnicas estadísticas, las cuales son una de las partes más objetivas de la calidad.

Calidad ha sido en estos tiempos una palabra de moda. Es importante analizar todos los elementos que se plantean en un sistema de calidad, para abstraer los elementos útiles a las necesidades de la empresa y desechar todo aquello que sea parte de esa moda. Es tan fácil darse cuenta de que existen modas en las formas administrativas, y basta con ver la fuerza que empieza a cobrar ahora el término Reingeniería en el ámbito administrativo de las empresas, empezándose a dejar a un lado el de la calidad. Se necesita hacer un análisis maduro y bastante objetivo para lograr obtener de cada corriente lo verdaderamente benéfico, sólo así se puede estabilizar una empresa para cumplir eficazmente con sus metas y objetivos.

Walter A. Shewhart desarrolló la primera herramienta estadística para el control de la calidad en los Bell Telephone Laboratories. Propuso el uso de las cartas de control conocidas como clásicas con un enfoque meramente industrial. Esto sucedió en 1924, pero en esos tiempos la gente involucrada en la industria se rehusó a aceptar dichos métodos de control estadístico aduciendo que la matemática estadística no tenía nada que hacer en los procesos de producción. Por ello la difusión y desarrollo del control estadístico de la calidad fue lenta.

En 1939 se inicia el conflicto de la segunda guerra mundial, lo que obliga a los Estados Unidos a pensar en procesos seguros y confiables de producción para poder asegurar un armamento que les garantizara un buen desempeño en el campo de batalla. Teniendo el antecedente de la gente de Bell Telephone Laboratories, se dirigen a ellos para que colaboren con el ejército en la implementación de técnicas de muestreo y de control estadístico de calidad, con lo que surge una intensa capacitación en dichas técnicas a todos aquellos que estaban involucrados con la industria bélica. El mismo Deming participó como asesor en este sistema de capacitación militar.

Al término de la guerra la industria norteamericana estaba convencida de la importancia de la aplicación del control estadístico de calidad, y así, desde los Estados Unidos y la Gran Bretaña, las técnicas del control de la calidad se extendieron a otros países. A partir del impulso inicial del Dr. Deming, el control estadístico en Japón ha evolucionado hasta convertirse en uno de los mejores del mundo.

Las cartas Shewhart o cartas clásicas han tenido una gran difusión y desarrollo debido a su gran utilidad, sin embargo también se han seguido desarrollando otros tipos de cartas que pueden en algunos casos ser mejores que las cartas Shewhart. Las cartas de Sumas Acumulativas (CUSUM, Cumulative Sum) son un ejemplo de dichas cartas, y éstas son el objeto de estudio en este trabajo de Tesis.

Las cartas CUSUM tienen como característica detectar cambios pequeños en la media de los procesos, de aquí la importancia de utilizar estas cartas en procesos donde interesa detectar tales cambios. En México la difusión de la CUSUM es muy pobre y su utilización es nula. Por ello es importante la difusión de la herramienta por medios que contengan un lenguaje apropiado para el nivel de cultura estadística de los técnicos mexicanos. Todo esto aunado al hecho de que la bibliografía existente sobre la carta CUSUM tiene fallas y desaciertos, tanto al comparar éstas con las cartas tipo Shewhart, así como en su presentación.

ANTECEDENTES

En la gran mayoría de la bibliografía existente sobre cartas de control CUSUM, tanto en libros como en artículos de revistas, se encuentra que la información sobre las cartas CUSUM se enfoca a mencionar que éstas tienen la gran ventaja de detectar los cambios pequeños de la media de un proceso y se dan a la tarea de sólo definir las ecuaciones que sirven para elaborar las cartas CUSUM pero tienen la completa ausencia de ejemplificaciones. En los casos en que se dan ejemplos, éstos no parecen estar bien, es decir, da la impresión de que se falsearon las gráficas para poder hacer coincidir la teoría con la práctica, o en otros casos, no definen bien de donde salen ciertos valores. Esto deja la impresión de que muchos autores incluyen el tema de dichas cartas sólo por no ignorarlo, pero no se dan a la tarea de hacer un buen análisis del mismo o de especificar de forma clara y concisa la técnica de la elaboración de las cartas CUSUM.

Si alguna persona dentro del ambiente industrial se interesa en aplicar dichas cartas en su proceso se encuentra con el gran obstáculo de no contar con información clara y precisa sobre su elaboración. Por lo general este tipo de personas no cuenta con el tiempo requerido para poder hacer una investigación sobre el tema, por lo que necesita información que lo guíe rápida y claramente al buen uso de la herramienta

que busca. La falta de información accesible a un nivel técnico de las herramientas estadísticas puede ser también una de las causas del porqué se tienden a olvidar o ignorar dentro del desarrollo de la calidad.

En este trabajo se realiza una investigación sobre el uso de las cartas CUSUM con el objetivo de determinar de forma clara su elaboración de tal manera que la persona que necesite utilizar esta herramienta estadística en su empresa y que no tenga conocimientos estadísticos profundos, lo comprenda. Se definirán cuales son las características de tales cartas, que las pueden hacer mejores o peores que una carta \bar{X} , dependiendo del proceso al que serán aplicadas. En el capítulo I se introducirá a el control estadístico de procesos, comentando las características generales de las cartas de control \bar{X} ; en el segundo capítulo se analiza la construcción y las propiedades de la carta CUSUM y se propone el método más práctico para su construcción. En el capítulo III se lleva acabo la construcción de la carta CUSUM con datos simulados y se compara el desempeño de ésta con respecto a la carta \bar{X} . En el capítulo IV se realiza una revisión bibliográfica para evidenciar los errores en que han incurrido autores que han escrito sobre las cartas CUSUM, se analizan las fallas que han tenido al compararlas con las cartas \bar{X} , la falta de definición de los parámetros necesarios para su construcción, así como la mala presentación de las mismas, entre otros problemas. Finalmente en el capítulo V se presentan las conclusiones generadas en el desarrollo del trabajo

CAPITULO I

INTRODUCCION A LAS CARTAS DE CONTROL ESTADISTICO

1.1 INTRODUCCION

El origen de los diagramas de control tiene que ver con la diferenciación de las causas de la variación en la calidad de un producto o servicio.

Si se lanza un dado al aire existen una cantidad de factores que influyen para que el dado caiga con una cara u otra hacia arriba, a este conjunto de factores se les conoce como causas comunes o aleatorias, más sin embargo, si cargamos el dado de una cara para obtener la mayoría de las veces una cara superior determinada, entonces estamos haciendo uso de lo que se conoce como causa especial o atribuible para que el experimento de lanzar el dado no sea ya un fenómeno aleatorio.

Con la adopción del punto de vista estadístico en la industria, se reconoció que ciertas variaciones en la calidad del producto corresponden a la categoría de variaciones comunes acerca de las cuales es poco lo que se puede hacer a nivel operativo, para mejorar el proceso. El conjunto de causas comunes que producen variación en la calidad del producto manufacturado, viene así a ser semejante, como en el caso del dado, al conjunto de fuerzas que dan lugar a que una moneda caiga de uno a otro lado cuando en forma al azar es lanzada al aire.

Las solución a las causas comunes está por lo general solo al alcance de la dirección de la empresa, quedando fuera del nivel operativo el poder solucionarlas. Cuando en un proceso solo existen este tipo de causas, entonces el proceso se encuentra dentro de control estadístico.

Además de las variaciones comunes en calidad, existen las que son producidas por causas especiales. En su mayor parte estas causas son consecuencia de:

- Mala operación del equipo
- Diferencias entre los trabajadores.
- Diferencias entre los materiales

Este tipo de causas pueden corregirse a nivel operativo y su presencia ocasiona que el comportamiento del proceso no sea aleatorio y se salga de control estadístico.

Hurley y Landeros (1985) proporcionan una tabla con las diferencias entre las causas aleatorias y atribuibles (ver tabla 1.1).

Tabla 1.1

Causas Aleatorias	Causas Atribuibles
Descripción	
<ul style="list-style-type: none"> - Consiste en muchas causas individuales. - Cualquier causa aleatoria da como resultado una cantidad pequeña de variación (pero muchas causas aleatorias dan como resultado conjunto un total sustancial) - Ejemplos son: variación humana en el ajuste de de controles, vibraciones ligeras en las máquinas pequeñas variaciones en la materia prima. 	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste en una o unas pocas causas individuales. - Cualquier causa atribuible da como resultado una cantidad grande de variación. - Ejemplos son: un error grave de un operador, preparación equivocada de un equipo, un lote de materia prima prima deficiente.
Interpretación	
<ul style="list-style-type: none"> - Variación aleatoria no se puede eliminar del proceso económicamente. - Cuando existe solamente variación aleatoria en un proceso éste está siendo operado lo mejor que se puede, si de todos modos se están produciendo productos defectuosos, un cambio básico es requerido. - Con solamente variación aleatoria, el proceso es suficientemente estable para usar técnicas de muestreo para predecir la calidad de la producción total, o para efectuar estudios de capacidad de proceso, o para efectuar estudios de optimización del proceso. 	<ul style="list-style-type: none"> - Variación atribuible se puede detectar; las acciones para eliminar sus causas son usualmente, económicamente variables. - Si existe variación atribuible en un proceso, éste no está siendo operado lo mejor que se puede. - Con variación atribuible presente, el proceso no es lo suficientemente estable como para usar técnicas de muestreo para predicción.

La variación es natural en los procesos, y es importante saber cuando esa variación es aleatoria o atribuible, para ello es importante el empleo de las cartas de control estadístico.

1.1.1.- Teoría de las cartas de control

Idealmente, sólo las causas aleatorias deben estar presentes en un proceso ya que esto representa la mínima cantidad de variación. Se dice que un proceso que opera sin causas atribuibles de variación está en un estado de control estadístico o simplemente "bajo control". Un proceso que está bajo control no solamente está funcionando lo mejor que puede; también el estado de control permite la situación ventajosa de poder realizar estudios adicionales para mejorar el proceso. Alcanzar este estado es lo que hace tan útil identificar y eliminar causas atribuibles de variación, y éste es el propósito primario de una carta de control.

La carta de control distingue entre causas aleatorias y causas atribuibles de variación a través de su selección de los límites de control. Estos se calculan, basándose en las leyes de probabilidad, de tal manera que las variaciones aleatorias tan grandes que resultan altamente improbables se imputan no a las causas aleatorias, sino a las causas atribuibles. Cuando algún punto excede a los límites de control, es una señal de que causas atribuibles se han metido al proceso y que hay que investigar tal causa. La variación de los puntos dentro de los límites de control indica que sólo causas aleatorias están presentes y se debe abstener de modificar el proceso. Desde luego que para poder determinar los límites de control debemos de conocer el comportamiento que en teoría deben de seguir los datos cuando están ausentes de causas atribuibles.

Vamos a suponer que se toman muestras de un tamaño n dado en el curso de un proceso con intervalos regulares, y que para cada muestra se calcula su media \bar{X} . Si no hay causas atribuibles presentes, \bar{X} se distribuirá en una forma estadística determinada, tal como en la figura 1.1. Si se toman bastantes muestras es posible determinar la media y ciertos puntos extremos de esta distribución. Por ejemplo, la teoría dice que la distribución de \bar{X} es normal. En tal caso, de

la media de las muestras sería posible estimar la media de la distribución de \bar{X} y de las variaciones dentro de la muestra la desviación estándar de \bar{X} ($\sigma_{\bar{X}}$). Si los estadísticos \bar{X} se grafican en un diagrama cuya escala vertical se calibra en unidades de \bar{X} y la escala horizontal se marca con relación al tiempo para la ordenación de \bar{X} , y se traza una línea horizontal a través de la media estimada de \bar{X} y otras a través de algún valor de los extremos superior e inferior de la distribución de \bar{X} , que se tomarán como los límites superior e inferior respectivamente (ver figura 1.2), el resultado será una carta de control para \bar{X} .

Figura 1.1 Distribución de las variables comunes en una medida de calidad de una muestra.

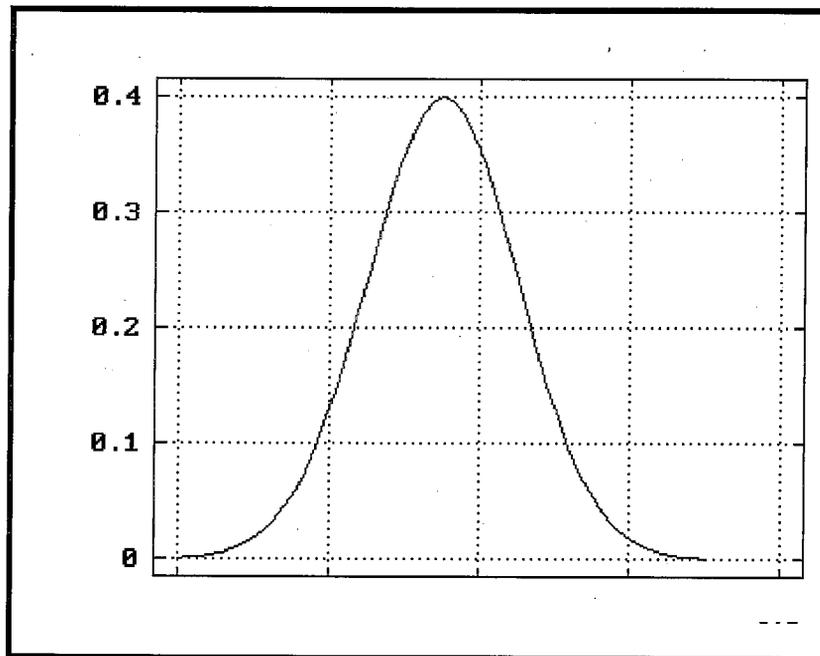
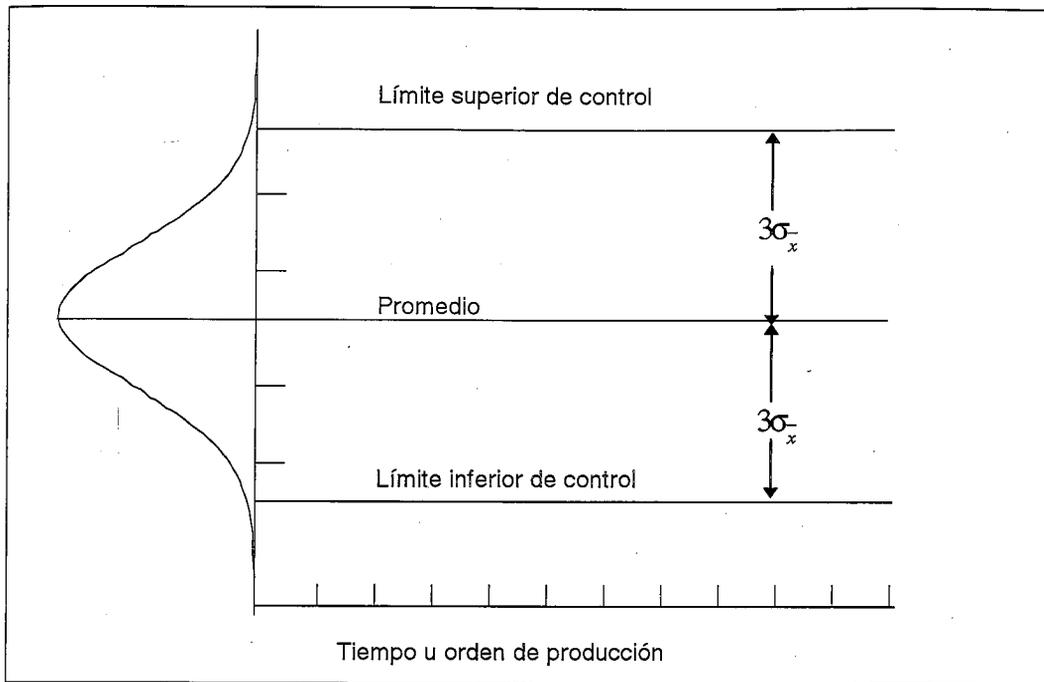


Figura 1.2 Ilustración de la base teórica de un diagrama de control

Para la mayor parte de las cartas de control, los límites de control se calculan basándose en el promedio de $\bar{X} \pm 3$ veces la desviación estándar de \bar{X} , es decir que:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{X} + 3\sigma_{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{X} - 3\sigma_{\bar{x}}$$

Al emplear $\bar{X} \pm 3$ veces la desviación estándar de \bar{X} , resulta que 99.73% de los valores graficados caerán dentro de los límites cuando solo existan causas aleatorias en el proceso y que el 0.27% de los valores caerán fuera de los límites de control. Pero como el porcentaje del 0.27 es muy bajo, entonces si un punto cae fuera de los límites de control se supondrá que fue debido a que existen también causas atribuibles en el proceso que están ocasionando que el proceso se salga de control.

Debe observarse entonces que si el proceso se encuentra en control, existe una probabilidad del 0.27% de que un punto caiga fuera de los límites de control y que se tome como una salida de control, resultando así una falsa alarma. A esta probabilidad se le conoce como error tipo I o error α .

Para las cartas de control, el error α o error tipo I, es la probabilidad de tomar a un punto que se sale de los límites de control, como una salida de control, cuando en realidad el proceso si está controlado.

En el empleo de las cartas de control constituye una meta de la gerencia, el reducir las fluctuaciones en un proceso hasta que este se encuentre en un estado de control estadístico al nivel deseado.

El Dr. Shewhart indica con insistencia que un proceso no deberá ser estimado como que está bajo control, a menos que la forma en que se han producido las variaciones aleatorias haya persistido durante algún tiempo y para una cantidad razonable de producción (ver Shewhart 1931). El expresa:

El estado potencial de control económico se puede aproximar sólo como un límite estadístico, incluso después de que las causas atribuibles de variabilidad han sido detectadas y eliminadas. Un control de este tipo no se puede alcanzar en un solo día. No se puede lograr en la producción de un elemento del cual sólo se producen una cuantas piezas. Sin embargo se puede lograr científicamente en una producción continua masiva.

Más específicamente afirma:

También se ha observado que rara vez una persona estaría justificada al determinar que ha alcanzado un estado de control estadístico en una determinada operación o proceso de producción repetitivas hasta que haya obtenido, en condiciones que se presuma que son en lo esencial iguales, una secuencia de no menos de veinticinco

muestras, de cuatro cada una, que satisfagan el criterio de que todos los puntos caigan dentro de los límites de control.

Se deberá observar también que: si no hay puntos que caen fuera de los límites de control, y no hay pruebas de variaciones no aleatorias dentro de los límites, esto no significa que no estén presentes causas especiales. Simplemente significa que la hipótesis de que las causas comunes se encuentran funcionando es una hipótesis aceptable, y que es probable que resulte inútil buscar causas atribuibles. Así se aplica únicamente el principio científico de conservar la explicación de los fenómenos tan simple como resulte posible. Si las causas aleatorias pueden explicar razonablemente nuestros resultados, no debemos investigar más.

Ejemplo 1.1

Una máquina automática de llenado de envases de soda, tiene una media de llenado de un envase de $\mu=12$ oz. y se sabe que se tiene una desviación estándar de $\sigma=0.12$ oz. Se toman 30 muestras del proceso con $n=5$, en la tabla 1.2 aparecen las 30 medias muestrales calculadas con cada una de la muestras tomadas.

No. de Muestra	\bar{X}	No. de Muestra	\bar{X}
1	11.96	16	12.04
2	11.99	17	12.02
3	11.97	18	11.94
4	12.02	19	11.98
5	12.05	20	11.99
6	11.89	21	12.14
7	11.97	22	11.85
8	11.94	23	11.87
9	12.05	24	12.01
10	11.96	25	12.17
11	11.98	26	12.10
12	12.01	27	12.14
13	12.05	28	12.05
14	11.91	29	11.90
15	11.99	30	11.95

Como en este ejemplo graficaremos los valores de las \bar{X} , entonces se utilizará una carta \bar{X} , cuyos límites superior e inferior son:

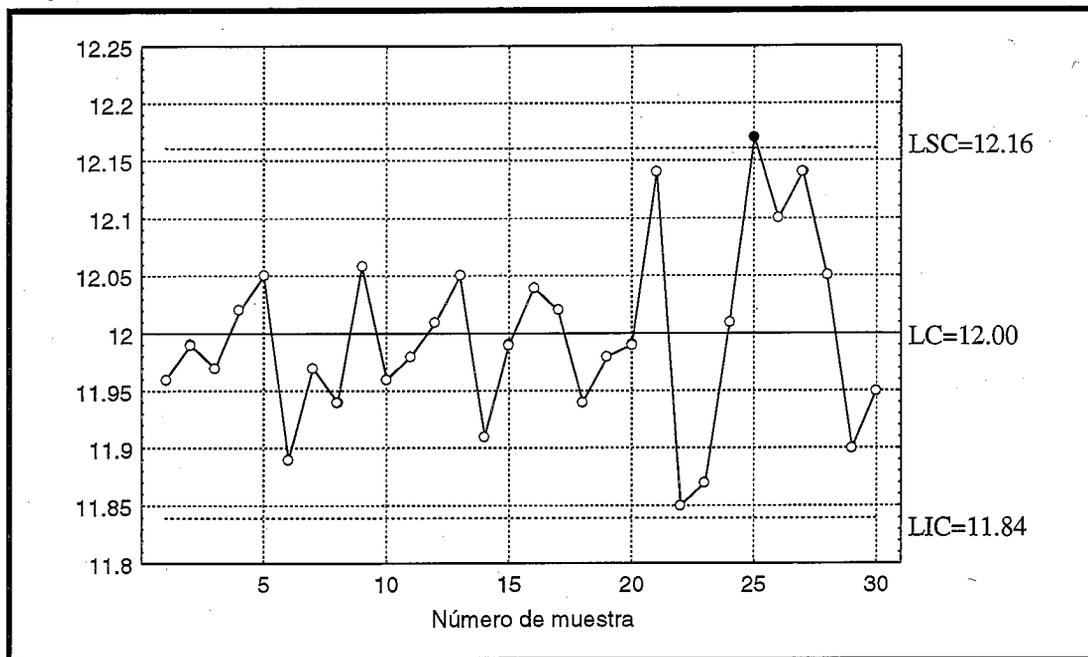
$$LSC = \bar{X} + 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{X} + 3\sigma / \sqrt{n} = 12 + (3)(0.12) / \sqrt{5} = 12.16$$

$$LC = \mu_{\bar{x}} = 12$$

$$LIC = \bar{X} - 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{X} - 3\sigma / \sqrt{n} = 12 - (3)(0.12) / \sqrt{5} = 11.84$$

La gráfica construida con estos límites se presenta en la figura 1.3.

Figura 1.3 Carta \bar{X}



En la figura 1.3 se puede observar que la gráfica tiene un punto fuera del límite superior de control, lo que indica que el proceso está fuera de control, aunque no se

debe olvidar que existe una posibilidad de 0.27% de que ese punto no represente una salida de control y que por lo tanto solo sea una falsa alarma.

Una carta de control es un método para describir en forma concreta lo que es un estado de control estadístico; en segundo lugar es un medio para alcanzar el control; y en tercero, constituye un procedimiento para juzgar si se logró el control.

1.1.2 Longitud de corrida promedio (ARL)

El ARL es el número promedio de puntos que deben ser dibujados antes de que un punto indique una condición de fuera de control del proceso.

Para cualquier carta de control Shewhart, el ARL puede ser expresado como:

$$\text{ARL} = \frac{1}{\text{Probabilidad de que un punto indique fuera de control}}$$

Ya se dijo que aún estando el proceso en control, existe una probabilidad de que un punto se salga de los límites de control indicando una pérdida del mismo, y que a esto se le conoce como "falsa alarma", y la probabilidad de que esto suceda es igual a α . Por lo que para un proceso en control existe un ARL que se denominará L_o y es:

$$\text{ARL}_{(\text{Para un proceso en control})} = L_o = \frac{1}{\alpha}$$

En el ejemplo 1.1 se construyó la carta \bar{X} con límites de control de $\pm 3\sigma_{\bar{X}}$, la cual tiene una $\alpha=0.0027$, es decir que el 0.27% de los puntos se saldrán de los límites de control, generando una falsa alarma. El ARL es para este ejemplo:

$$ARL = L_o = \frac{1}{0.0027} = 370$$

Lo cual significa que en promedio, cada 370 observaciones se tendrá un punto fuera de los límites de control.

Ahora bien, si el proceso realmente se a salido de control debido a que a sufrido un cambio en su media de $\delta \sigma_{\bar{X}}$, la carta no detectará este cambio inmediatamente, sino que se tendrá que tomar un número promedio determinado de muestras hasta que aparezca un punto detectando la falta de control, a este número de puntos se le conoce como el ARL y se denota como L_δ y su ecuación es:

$$ARL = L_\delta = \frac{1}{1 - \beta}$$

donde β es el error tipo II, que es la probabilidad de que un punto determine que existe un control en el proceso, cuando en realidad el proceso se encuentra fuera de control. Por lo tanto $1-\beta$, es la probabilidad de que un punto determine que el proceso se encuentra fuera de control cuando efectivamente así es. Para mayor información sobre β , así como el cálculo de la misma ver Montgomery 1991.

1.1.3 Pruebas adicionales para las cartas \bar{x}

Cuando un punto se sale de los límites de control se estudiará el proceso para determinar la causa especial responsable de tal comportamiento. En muchos casos cuando está presente una causa especial no se refleja en un punto que se sale de los límites de control, sino mas bien en un patrón de puntos que no tienen un comportamiento aleatorio, cuya probabilidad de que se presenten en un proceso en control es muy baja, por lo que su presencia hace suponer que el proceso está fuera de control. Tales patrones nos representan más información sobre el proceso que los puntos solos porque un punto aislado refleja solo la información en una sola muestra, mientras que un patrón de puntos refleja información de la totalidad de las muestras.

La figura 1.4 muestra ocho tipos de patrones no naturales para las cartas \bar{x} dados por Western Electric (1956), que son importantes y son usados muy frecuentemente. Nótese que estas cartas denotan tres zonas A, B, y C. La zona C contiene todos los puntos alejados hasta una distancia de $1\sigma_{\bar{x}}$ y la B a los puntos entre $1\sigma_{\bar{x}}$ y $2\sigma_{\bar{x}}$ de la línea central, y la línea A contiene todos aquellos puntos que no están en B o C y que se encuentran a una distancia hasta de $3\sigma_{\bar{x}}$ a partir de la línea central. En cada una de estas cartas se aplica cada una de las pruebas y se coloca una cruz en el punto que activa la prueba. En la figura 1.5 se muestran las zonas y sus probabilidades normales de que un punto caiga en cada una de ellas.

Ahora se darán las probabilidades de que estas pruebas nos den una falsa alarma cuando los puntos sean variables aleatorias normales i.i.d. Las probabilidades correspondientes a estas cartas son las siguientes (para mayor información ver Western Electric, 1956):

Prueba 1:	Probabilidad = 0.0027
Prueba 2:	Probabilidad = $2(1/2)^9 = 0.00391$
Prueba 3:	Probabilidad = $2/6! = 0.00277$
Prueba 4:	Probabilidad = 0.0046
Prueba 5:	Probabilidad = 0.00304
Prueba 6:	Probabilidad = 0.00553
Prueba 7:	Probabilidad = $(0.68268)^{15} = 0.00326$
Prueba 8:	Probabilidad = $(0.31732)^8 = 0.000103$

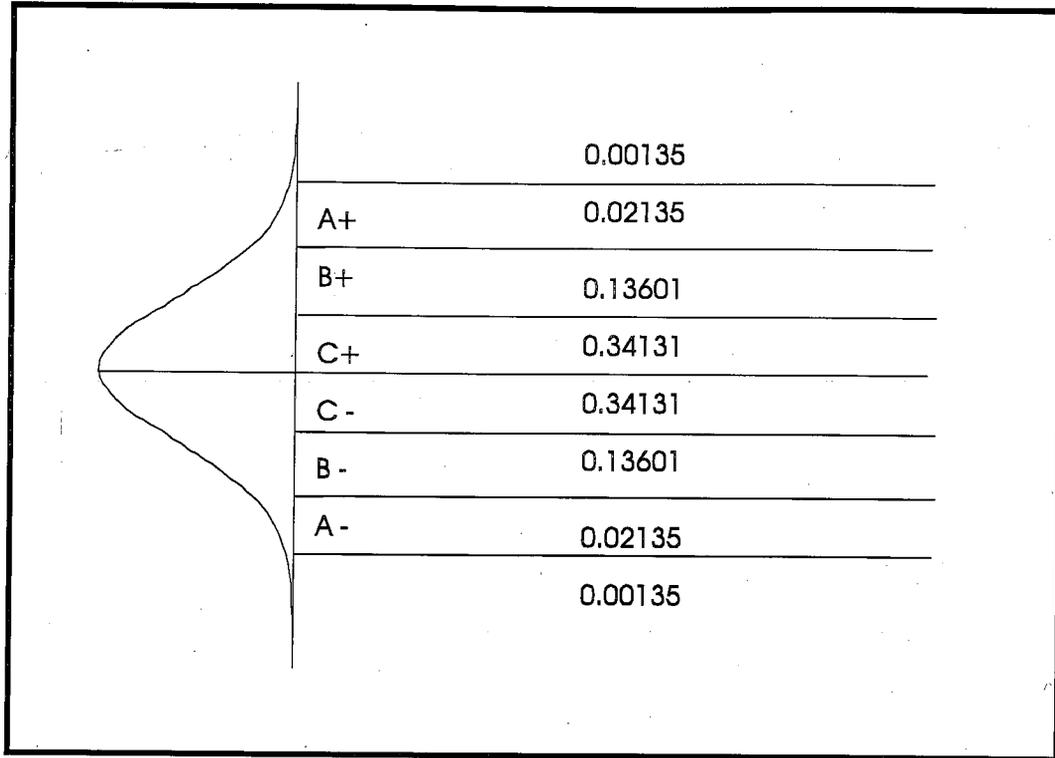
Cuando dos o más de estas pruebas son aplicadas simultáneamente la probabilidad total de una falsa alarma, para patrones que son mutuamente excluyentes, es igual a la suma de las probabilidades, y es aproximadamente igual a la suma para todos los casos dado que las probabilidades de intersección son todas pequeñas. Es por esto que aplicar varias de estas pruebas juntas tiene su inconveniente, pues tendríamos un número muy alto de falsas alarmas.

Por ejemplo, si diseñamos una carta \bar{X} y se analiza con las tres primeras pruebas, entonces el L_0 es igual a:

$$L_0 = 1/\alpha = 1/(0.0027+0.00391+0.0027) = 1/0.0093 = 107.4$$

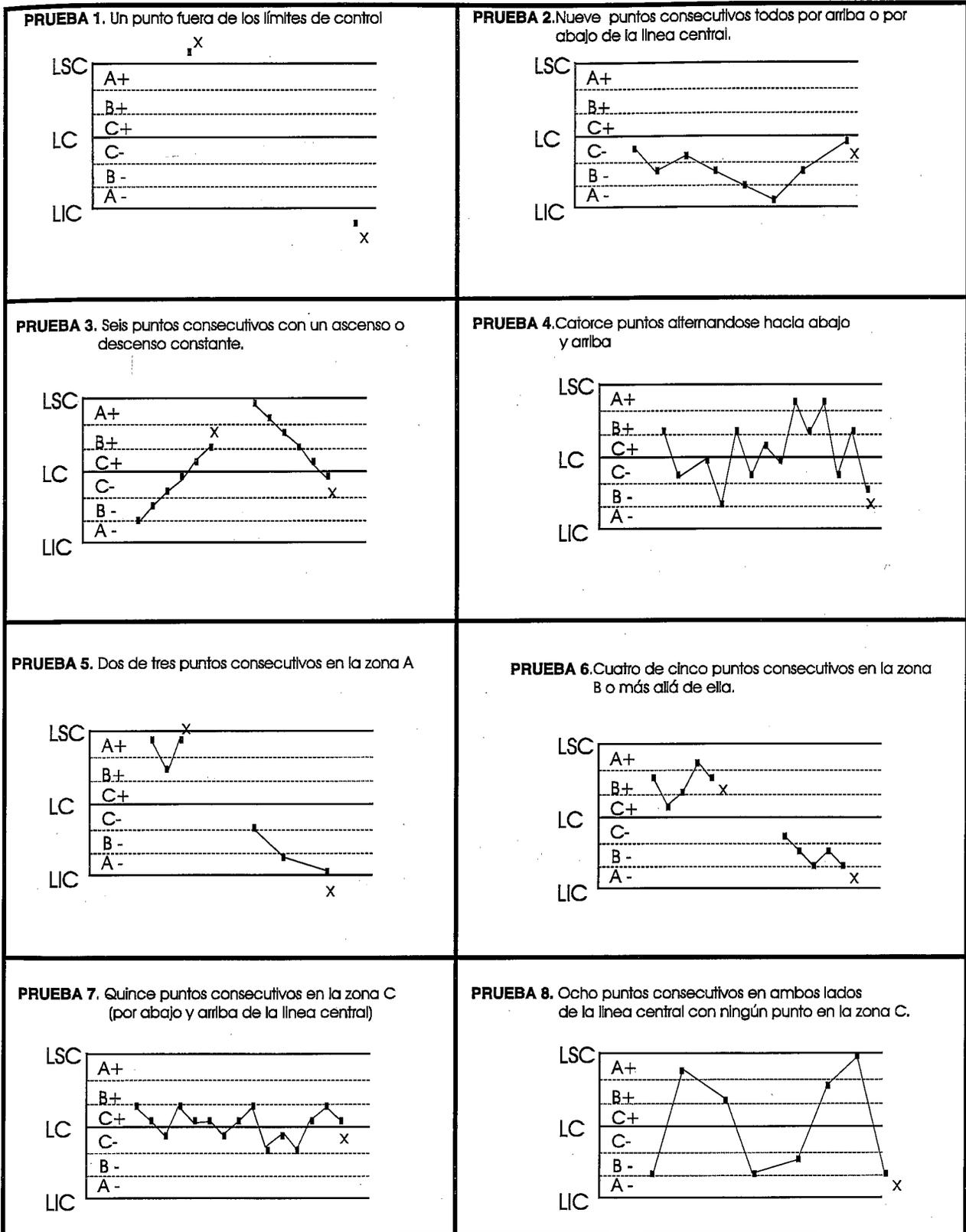
Esto significa que en promedio cada 107 observaciones se tendrá una falsa alarma, lo cual puede resultar grave para el control del proceso.

Figura 1.5



Existen diferentes tipos de cartas Shewhart y cada una tiene un uso especial, su selección depende del proceso y de la variable que se este controlando, en el capítulo V se presenta una tabla con las diferentes cartas Shewhart y si se quiere una información más amplia sobre sus características y su uso ver Montgomery 1991.

Figura 1.4



CAPITULO II

CARTAS CUSUM

2.1 INTRODUCCION

Las cartas Shewhart grafican el estadístico de una sola muestra por cada punto sin importar el valor del estadístico anterior. Esto es, en cada punto se grafica sólo información relativa a ese punto y las medias graficadas se suponen independientes.

En 1954 Page diseñó otra herramienta para el control estadístico de procesos que a diferencia de las cartas Shewhart, se basan en acumular en cada punto de la carta la información de los puntos anteriores, siendo de esta forma el valor de un punto, su propio valor más la suma de los valores anteriores. Y a esta herramienta se le conoce como cartas de Sumas Acumuladas (Cumulative Sum, CUSUM).

El acumular la información que proporciona cada observación les permite a las cartas CUSUM tener mayor sensibilidad a pequeños cambios en la media del proceso que las cartas de Shewhart, ya que éstas no tienen una buena respuesta cuando la desviación de la media del proceso se encuentra entre 0.5 y 2.0 desviaciones estándar. Existen procesos industriales en los cuales tales magnitudes de las desviaciones son muy importantes, como pueden ser los procesos farmacéuticos o nucleares.

2.2 CARACTERISTICAS DE LAS CARTAS CUSUM

Tal como ya se ha mencionado, la ventaja de las cartas CUSUM es que debido a que toman en cuenta la historia de las desviaciones de la media, tienen capacidad de detectar los cambios pequeños en el nivel medio del procesos de una manera rápida.

Se puede argumentar que si las cartas Shewhart son utilizadas con las reglas ó pruebas complementarias mostradas en el capítulo I, entonces pueden tener una sensibilidad muy cercana o igual que las CUSUM en la detección de cambios pequeños del valor objetivo. Pero, aunque esto es cierto, también tiene sus inconvenientes, los cuales se observan en la tabla 2.1, construida por Champ y Woodall (1987). En esta tabla, R_1 es el L_0 que resulta al considerar sólo la primera regla, R_{12} es el L_0 considerando las dos primeras reglas y R_{123} es el L_0 considerando las tres reglas.

Tabla 2.1 ARL's para cartas Shewhart 3σ

Desviación (en σ 's)	R_1	R_{12}	R_{123}
0	370.4	225.44	122.05
0.2	308.43	177.56	89.14
0.4	200.08	104.46	48.71
0.6	119.67	57.92	27.49
0.8	71.55	33.12	17.14
1	43.89	20.01	11.73
1.2	27.82	12.81	8.61
1.4	18.25	8.69	6.63
1.6	12.38	6.21	5.27
1.8	8.69	4.66	4.27
2	6.3	3.65	3.5
2.2	4.72	2.96	2.91
2.4	3.65	2.48	2.47
2.6	2.9	2.13	2.13
2.8	2.38	1.87	1.87
3	2	1.68	1.68

En esta tabla las dos reglas complementarias a las que se hace referencia, además de la regla 1, son:

Regla 2: Dos de tres puntos consecutivos fuera de la línea $+2\sigma$.
o dos de tres puntos consecutivo fuera de la línea -2σ .

Regla 3: Ocho puntos consecutivos arriba o abajo de la línea central.

Observando la tabla 2.1 se sabe que una carta Shewhart tiene un $ARL=370.40$ (L_0) cuando no ha existido ninguna desviación en el proceso, es decir cuando el proceso está en control estadístico. Además tiene un $ARL=43.89$ ($L_{1.0}$) cuando la media del proceso ha tenido una desviación de 1.0σ . Esto significa que si el proceso está en control, cada 370 observaciones en promedio, tendremos una falsa alarma en nuestro proceso señalando una salida de control que en realidad no existe, y que si el proceso se desvía con una magnitud de 1σ , entonces esta será detectada después de haber tomado 43 observaciones en promedio, a partir de que sucedió el cambio en la media del proceso.

Cuarenta y tres observaciones para poder detectar un cambio en el proceso pueden ser demasiadas, sobre todo cuando estas son tomadas en intervalos de tiempo muy espaciados o cuando por cualquier motivo cada muestra es muy costosa, así que es deseable tener un L_1 menor para detectar antes la salida de control. Para ello utilizamos las reglas complementarias 1,2 y 3 y notamos en la tabla 2.1 que el L_1 ha disminuido a $L_1=11.73$, lo que significa que vamos a detectar un cambio 1σ en la media del proceso, después de haber tomada solo 11.73 observaciones. Pero esto lleva implícito un pago que es el que el L_0 también habrá disminuido a $L_0=122.05$, lo cual nos dice que cada 122.05 observaciones en promedio, la carta de control Shewhart nos dirá que el proceso está fuera de control cuando en realidad no lo está, es decir que, cada 122.05 observaciones tendremos una falsa alarma (para más información sobre estas comparaciones consultar a Champ y Woodall, 1987).

Por lo anterior es necesario contar con una herramienta que nos permita detectar de una manera rápida los cambios pequeños pero sin sacrificar el L_0 , y las cartas CUSUM poseen esa característica. Lucas (1976) publica los cálculos de la tabla 2.2.

Tabla 2.2 ARL para cartas CUSUM $h=8\sigma$ y $k=0.25\sigma$

Desviación (múltiplos de σ)	ARL
0	368
0.25	83.6
0.5	28.8
0.75	16.4
1	11.4
1.5	7.11
2	5.21
2.5	4.15
3	3.48

En la tabla 2.2 es claro que cuando tenemos una carta CUSUM monitoreando un proceso en control ésta tendrá un $L_0=368$ y que si el proceso sufre un cambio de 1σ en la media, saliéndose de control, el L_1 será $L_1=11.4$, es decir que en promedio detectaremos el cambio después de haber tomado 11 muestras a partir de que el proceso se ha salido de control y seguiremos teniendo una falsa alarma cada 368 observaciones cuando el proceso esté nuevamente controlado.

Así pues, el hecho de que puedan detectar pequeños cambios en la media del proceso sin afectar el ARL bajo condiciones de control estadístico es la característica que determina que las cartas CUSUM deben ser utilizadas en aquellos procesos donde se desee detectar cambios pequeños de la media, por lo general estos cambios en el valor objetivo se dice que son pequeños cuando se encuentran entre 0.5σ y 2.0σ .

Por otro lado, se ha dicho también que las cartas CUSUM tienen como característica el que no detectan rápidamente los cambios grandes en la media del proceso, mientras que las cartas Shewhart si lo hacen. En la tabla 2.1 tenemos que aplicando sólo la regla 1 en una carta Shewhart 3σ para controlar un proceso, se observa que si este se sale de control con una desviación en la media de 2.4σ , el $L_{2.4}$ de la carta será $L_{2.4}=3.5$, mientras que interpolando en la tabla 2.2 para la CUSUM se obtiene que $L_{2.4}=4.5$. Esto significa que si para el mismo proceso utilizamos ambas cartas, detectaremos primero una desviación de 2.4σ en el valor objetivo, con la carta Shewhart que con la carta CUSUM. Y mientras mayor sea la magnitud de la desviación, mayor ventaja toma la carta Shewhart sobre la CUSUM. Por ejemplo, si el proceso sufriera un cambio de 3σ , para la carta Shewhart tenemos $L_3=2.0$, mientras que la carta CUSUM presenta un $L_3=3.48$, siendo mayor la diferencia que para el cambio de 2.4σ .

Una desventaja de las cartas CUSUM es que no detectan rápidamente los cambios grandes en el valor objetivo del proceso, siendo más conveniente emplear cartas Shewhart en estos casos. Se consideran generalmente como cambios grandes aquellos mayores de 2.0σ .

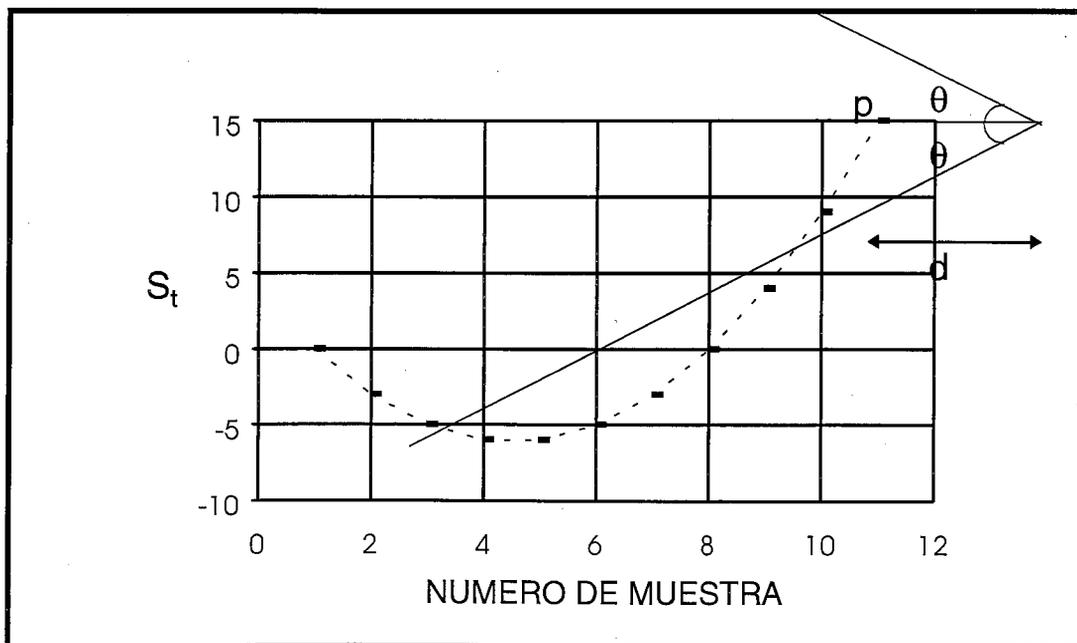
2.3. PARAMETROS DE LA CARTA CUSUM

La figura 2.1 muestra una carta CUSUM, en ella están definidos los parámetros necesarios para su construcción y son el ángulo θ y la distancia d que existe entre el punto p y el vértice. Sobre el eje horizontal se grafica el número de muestra y sobre el eje vertical la suma acumulada de la diferencia entre la media muestral \bar{X} y el valor esperado u objetivo μ . Este estadístico se define por

$$S_t = \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i - \mu) \quad 2.1$$

Sobre el diagrama construido con los puntos generados por las sumas acumuladas, se construye una mascarilla en forma de V (ver figura 2.1), el punto "p" de la **máscara-V** se va situando en cada nuevo punto graficado y cuando algún punto ya graficado se sale del ángulo formado por los brazos de ésta, entonces se dice que el último punto señala que el proceso se ha salido de control.

Figura 2.1 Carta CUSUM



2.4 CONSTRUCCION DE LAS CARTAS CUSUM

Se presentan en esta sección dos metodologías para la elaboración de las cartas CUSUM, una de ellas es utilizada por la mayoría de los autores como Montgomery (1991) y Ewan (1963). Y la otra es una metodología que propongo porque considero más práctica y correcta, la cual toma como herramienta la tabla publicada por Bowker y Lieberman (1972).

La metodología propuesta a diferencia de la primera, considera el ARL que deberá tener la carta para, a partir de éste, calcular los parámetros de la misma.

2.4.1 Metodología para la construcción de las cartas CUSUM

La metodología considerada por la mayoría de los autores es la siguiente:

- Se obtiene una estimación de $\sigma_{\bar{x}}$ por medio de S/\sqrt{n} .
- Se determina el mínimo cambio D que se desea detectar en la media del proceso, este valor es conveniente definirlo como un múltiplo de $\sigma_{\bar{x}}$, es decir $D = \Delta \sigma_{\bar{x}}$.
- Se calcula $\delta = D / \sigma_{\bar{x}}$. Que es la magnitud del cambio que se desea detectar en desviaciones estándar de la media.
- Determinar el valor de α y β (Error tipo I y II), con los cuales trabajará la carta.
- Definir w como el factor de escala, el cual representa la relación entre la escala vertical por unidad en la escala horizontal. Ewan (1963)

recomienda que el valor de w varíe entre $1\sigma_{\bar{x}}$ y $2\sigma_{\bar{x}}$, pero que preferentemente sea lo mas cercano a $w=2\sigma_{\bar{x}}$.

- Para obtener la distancia d se utiliza la siguiente relación

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right) . \quad 2.2$$

Cuando β es pequeña, la ecuación 2.2 se simplifica a

$$d = - \left(\frac{2}{\delta^2} \right) \ln \alpha . \quad 2.3$$

- Para obtener el valor del ángulo θ utilizamos la relación

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{D}{2w} \right) \quad 2.4$$

El valor de la distancia d está en función inversa de D , es decir que si aumentamos o disminuimos la magnitud del cambio mínimo que se desea detectar, d disminuye o aumenta respectivamente. A la vez d es función directa de $\sigma_{\bar{x}}$, se aumenta o disminuye $\sigma_{\bar{x}}$ la distancia d hace lo mismo. El parámetro d depende entonces de la magnitud del cambio mínimo que se desea detectar y de la desviación estandar de las medias de la observaciones del proceso.

El valor del ángulo θ está en función directa de D , es decir que si aumenta o disminuye D , el ángulo θ hace lo mismo. θ es función inversa del factor de escala w , es decir que si éste aumenta ó disminuye, θ disminuye o aumenta respectivamente. Por lo tanto el parámetro θ depende de la magnitud del cambio mínimo que se desea detectar y del factor de escala.

La recomendación de Ewan (1963) de que el factor de escala se encuentre entre el valor de $1\sigma_{\bar{x}}$ y $2\sigma_{\bar{x}}$ se basa en que, si por ejemplo, seleccionamos un $w=1\sigma_{\bar{x}}$, entonces cuando ocurra un cambio de $1\sigma_{\bar{x}}$ en la media del proceso, la pendiente generada por los puntos graficados será de 45° . Si seleccionamos $w=2\sigma_{\bar{x}}$ entonces cuando ocurra un cambio de $2\sigma_{\bar{x}}$ la pendiente de los puntos será de 45° . Esto nos da una herramienta de visualización práctica. En muchos casos no será posible graficar con un w dentro de $1\sigma_{\bar{x}}$ y $2\sigma_{\bar{x}}$ por lo que se tendrá que utilizar otro valor, lo que no implica que nuestra carta sea inadecuada para su uso.

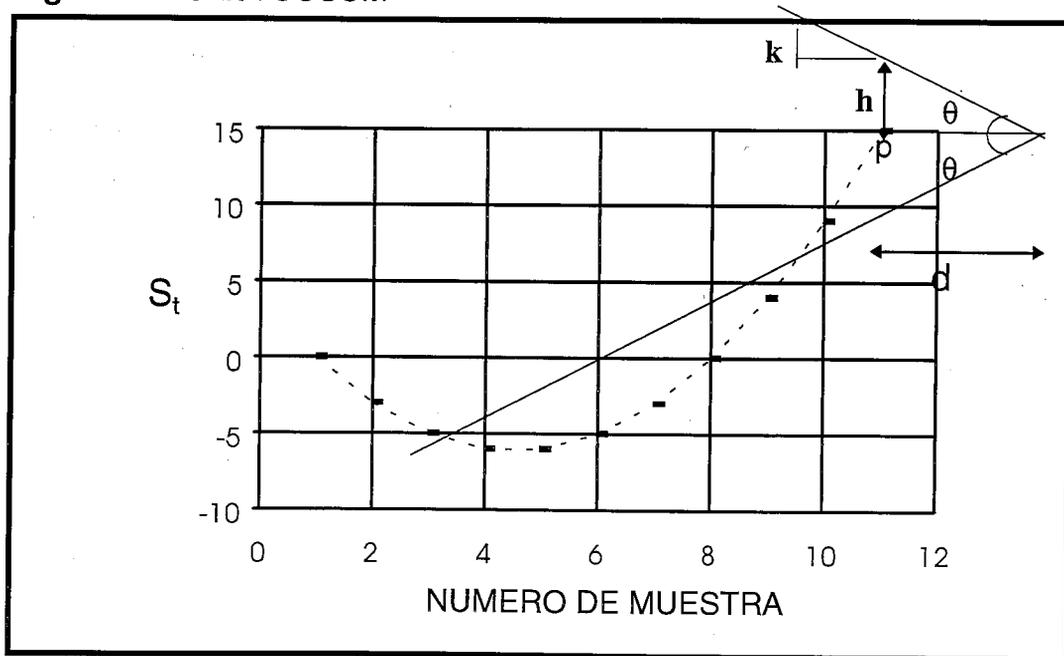
Existe otra parametrización de la carta CUSUM, donde h y k son los parámetros importantes y su relación con d y θ se expresa por:

$$h=wd(\tan \theta) \tag{2.5}$$

$$k=w(\tan\theta) \tag{2.6}$$

En la figura 2.2 se representan los parámetros anteriores, para visualizar su significado gráfico.

Figura 2.2 Carta CUSUM



El inconveniente de construir las cartas CUSUM siguiendo la metodología anterior es que se elaboran sin considerar el ARL que la carta tendrá en su funcionamiento.

Cuando se elabora una carta de control Shewhart se determina el valor de α con el cual se construirá la carta y es fácil calcular el L_o , tal como se presentó en el capítulo I. Pero en el caso de las cartas CUSUM el ARL de la carta que se construye no se puede calcular tan fácilmente a partir del α con que se diseña, por ello es que la elaboración de una carta CUSUM requiere de fijar de antemano el L_o con el que se desea que trabaje la carta.

2.4.2 Metodología propuesta para la construcción de las cartas CUSUM

Propongo la siguiente metodología para el diseño y elaboración de la carta de control CUSUM, teniendo como objetivo el que sea práctica y que se construya considerando el L_o con el que la carta se desempeñará en su funcionamiento.

Los parámetros necesarios para construir la máscara-V son d y θ , tal como se observa en la figura 2.2. Se llama d a la distancia que existe entre el vértice de la máscara y el último punto y θ es el ángulo de abertura que existe en los brazos de la máscara.

En el eje horizontal se grafican las muestras en el orden en que se van obteniendo del proceso y en el vertical la suma acumulada de la observaciones, obtenidas de la ecuación

$$S_t = \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i - \mu) , \tag{2.7}$$

donde \bar{x}_i es la i-ésima media muestral obtenida y μ es la media del proceso.

Los parámetros d y θ se obtienen utilizando la tabla 2.3, tomada de Bowker y Lieberman (1972).

Tabla 2.3 Parámetros para las cartas CUSUM

Δ		$L_0 = \text{ARL cuando el proceso está en control}$					
		50	100	200	300	400	500
0.25	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.125			0.195		0.248
	d	47.6			46.2		37.4
	L(0.25)	28.3			74		94
0.5	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.25	0.28	0.29	0.28	0.28	0.27
	d	17.5	18.2	21.4	24.7	27.3	29.6
	L(0.5)	15.8	19	24	26.7	29	30
0.75	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375
	d	9.2	11.3	13.8	15	16.2	16.8
	L(0.75)	8.9	11	13.4	14.5	15.7	16.5
1.0	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	d	5.7	6.9	8.2	9	9.6	10
	L(1.0)	6.1	7.4	8.7	9.4	10	10.5
1.5	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
	d	2.7	3.3	3.9	4.3	4.5	4.7
	L(1.5)	3.4	4	4.6	5	5.2	5.4
2.0	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	1	1	1	1	1	1
	d	1.5	1.9	2.2	2.4	2.5	2.7
	L(2.0)	2.26	2.63	2.96	3.15	3.3	3.4

Δ = Desviación respecto al valor objetivo (en $\sigma_{\bar{x}}$'s)

La metodología para su diseño es la siguiente:

1. Se debe definir el L_0 que será aceptable en la carta, es decir el número de falsas salidas de control que la carta detectará. Por lo general el L_0 se toma con un valor similar a el que se tiene en una carta Shewhart 3σ , es decir de $L_0=370$.
2. Se define la magnitud del cambio que queremos detectar en $\Delta\sigma_{\bar{x}}$'s y una vez definido el valor de Δ nos ubicamos en la tabla 2.3 y
3. Localizamos el valor que debe tener d para los L_0 y δ definidos.
4. Se calcula el valor de θ de acuerdo a la ecuación

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D}{2w}\right) \quad 2.8$$

donde $D = \Delta\sigma_{\bar{x}}$.

5. w =es el factor de escala, es decir, la relación entre la escala vertical por unidad en la escala horizontal. Se recomienda que este valor se encuentre entre $1\sigma_{\bar{x}}$ y $2\sigma_{\bar{x}}$, por lo ya antes explicado en la sección anterior.

De esta manera se puede construir la carta CUSUM con máscara-V, obteniéndose en la tabla 2.3 también el valor de L_s , es decir, el número de muestras que en promedio debemos tomar para poder detectar el cambio de magnitud $\Delta\sigma_{\bar{x}}$, cuando éste suceda.

En el capítulo III se exponen varios ejemplos que dejan claro el uso de la metodología propuesta para la construcción de la carta CUSUM máscara-V, así como también las ventajas de ésta sobre las cartas Shewhart.

2.5 CONSTRUCCION DE LAS CARTAS CUSUM NUMERICAS

El cálculo numérico de las cartas CUSUM se realiza obteniendo las sumas acumuladas inferior y superior $S_L(i)$ y $S_H(i)$ respectivamente, mediante las ecuaciones:

$$S_H(i) = \text{máx} [0, \bar{x}_i - (\mu_o + K) + S_H(i-1)] \quad 2.9$$

$$S_L(i) = \text{máx} [0, (\mu_o - K) - \bar{x}_i + S_L(i-1)] , \quad 2.10$$

donde $K = D/2$; y se satisface que $S_L(0) = S_H(0) = 0$.

Se toma un intervalo de decisión de tamaño

$$h = (dD)/2 \quad 2.11$$

donde d y D son los parámetros ya definidos en el punto anterior, y se considera que el proceso se ha salido de control cuando $S_L(i)$ o $S_H(i)$ exceden el valor de h .

Ejemplo 2.1

Consideremos un proceso industrial el cual tiene una media de $\mu=10$ y una desviación estándar de $\sigma=4.473$. Se toman 40 muestras de 5 unidades cada una ($n=5$). Se calculan las medias muestrales \bar{X}_i , las cuales aparecen en la tabla 2.4.

Se debe definir el L_0 de la carta, es decir el número de falsas alarmas de falta de control que toleraremos de la misma. Es común asignar un número cercano al que tiene una carta Shewhart con límites de control 3σ , que es $L_0=370$. En el proceso presente se toma $L_0=400$.

Se debe establecer también cual es la magnitud del cambio al cual se quiere sea sensible la carta de control (D). Esta magnitud debe definirse en un múltiplo (Δ) de la desviación estándar muestral $\sigma_{\bar{x}}$. En este proceso queremos que nuestra carta sea sensible a cambios de $1.0\sigma_{\bar{x}}$. Es decir.

$$D=1.0\sigma_{\bar{x}}$$

donde $\Delta =1.0$. Para ello debemos calcular el valor de la desviación estándar muestral, $\sigma_{\bar{x}}$, que esta dado por

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4.473}{\sqrt{5}} = 2.0$$

de donde resulta que

$$D=1(2)=2.0$$

Una vez definido lo anterior se calcula el intervalo de decisión

$$h=dD/2$$

El valor de d lo tomamos de la tabla 4.2. En ella encontramos que para $L_0=400$ y $D=1.0$, d toma un valor de 9.6, por lo tanto

$$h=9.6(2)/2=9.6 .$$

Esto significa que si S_H ó S_L toman un valor mayor que h , entonces el proceso se habrá salido de control.

El valor de S_H y S_L para cada \bar{x}_i se calculan con las ecuaciones 2.9 y 2.10, las cuales para este ejemplo toman la forma

$$S_H(i) = \text{máx} [0, \bar{x}_i - (11) + S_H(i-1)]$$

$$S_L(i) = \text{máx} [0, (9) - \bar{x}_i + S_L(i-1)]$$

donde $K= D/2=2/2=1$ y $S_L(0)= S_H(0)= 0$.

Los resultados de estos cálculos se presentan en la tabla 2.4.

Tabla 2.4 Datos del problema 2.1

No. Muestra	\bar{x}_i	$S_H(i)$	N_H	$S_L(i)$	N_L
1	12.39	1.39	1	0	0
2	10.83	1.22	2	0	0
3	13.05	3.27	3	0	0
4	11.5	3.77	4	0	0
5	10	2.77	5	0	0
6	10.05	1.82	6	0	0
7	6.06	0	0	2.94	1
8	10.81	0	0	1.13	2
9	12.04	1.04	1	0	0
10	6.25	0	0	2.75	1
11	10.01	0	0	1.74	2
12	10.09	0	0	0.65	3
13	12.52	1.52	1	0	0
14	11.38	1.9	2	0	0
15	9.13	0.03	3	0	0
16	8.45	0	0	0.55	1
17	10.7	0	0	0	0
18	7.18	0	0	1.82	1
19	10.01	0	0	0.81	2
20	8.03	0	0	1.78	3
21	14.23	3.23	1	0	0
22	8.69	0.92	2	0.31	1
23	13.49	3.41	3	0	0
24	12	4.41	4	0	0
25	9.83	3.24	5	0	0
26	14.74	6.98	6	0	0
27	9.45	5.43	7	0	0
28	11.62	6.05	8	0	0
29	13.82	8.87	9	0	0
30	13.74	11.61	10	0	0
31	10.08	10.69	11	0	0
32	9.1	8.79	12	0	0
33	12.26	10.05	13	0	0
34	14.57	13.62	14	0	0
35	12.17	14.79	15	0	0
36	10.89	14.68	16	0	0
37	15.4	19.08	17	0	0
38	13.9	21.98	18	0	0
39	10.43	21.41	19	0	0
40	10.48	20.89	20	0	0

En esta tabla se puede observar que en la observación 30 ocurre que

$$S_H > h$$

por lo que el la carta está mostrando que el proceso se salió de control.

El valor de $N_H=10$ cuenta el número de muestras que se han tomado desde que el proceso empezó a tomar una tendencia hacia la falta de control. Este número coincide con el valor de $L_{1,0}=10$ que nos da la tabla 2.3 para esta carta, que como sabemos indica que se necesitan tomar en promedio 10 observaciones después de un cambio de $1.0\sigma_{\bar{x}}$ para detectar el mismo.

Cuando se ha detectado el cambio en el proceso, se puede estimar la nueva media del mismo por medio de la ecuación 2.11.

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0 + K + \frac{S_H(i)}{N_H}, & \text{Si } S_H(i) > h \\ \mu_0 - K - \frac{S_L(i)}{N_L}, & \text{Si } S_L(i) > h \end{cases} \quad 2.11$$

En el presente ejemplo la nueva media estimada es

$$\hat{\mu} = \mu_0 + K + \frac{S_H(30)}{N_H} = 10 + 1 + \frac{11.61}{10} = 12.61$$

CAPITULO III

COMPARACION ENTRE CARTAS CUSUM Y \bar{X}

3.1 INTRODUCCION

Es importante el plantear de una manera clara y precisa, cual es la ventaja de utilizar una carta CUSUM en el lugar de una carta Shewhart.

En este capítulo se realizará lo anterior por medio de la obtención de datos, los cuales serán analizados por medio de las cartas Shewhart y CUSUM, equivalentes desde el punto de vista de su L_0 .

Se plantean 4 ejemplos: en el primero de ellos se analiza un proceso en control, en el segundo un proceso que tiene una desviación en su media de $0.5 \sigma_{\bar{x}}$; en el tercer ejemplo se analiza un proceso con una desviación en su media de $1.0 \sigma_{\bar{x}}$ y finalmente en el cuarto ejemplo se tiene un proceso con una desviación de su media

de $2.0 \sigma_{\bar{x}}$. En cada uno de los casos se construyen las cartas \bar{x} y CUSUM del proceso y se compara la efectividad de cada carta en los diferentes saltos en la media del proceso. Teniéndose como objetivo el poder concluir que efectivamente son mejores las cartas CUSUM para detectar cambios en la media del proceso, cuando esos cambios tienen magnitudes entre $0.5 \sigma_{\bar{x}}$ y $2.0 \sigma_{\bar{x}}$.

3.2 COMPARACION PRACTICA DE LAS CARTAS SHEWHART Y CUSUM

Se analizarán casos con datos simulados de un proceso normal, los cuales serán tratados con cartas CUSUM y Shewhart (aplicando sólo la regla 1, es decir de considerar el proceso fuera de control, cuando un punto se a salido de los límites de control), equivalentes para así poder visualizar claramente las características de cada una y en donde una supera a otra. De esta manera se podrá ver que lo que se establece en la teoría se cumple en la práctica.

Los datos utilizados son generados por medio del paquete STATGRAPHICS 6.0, y son números aleatorios normalmente distribuidos.

Ejemplo 3.1

Empezamos por simular un proceso que se encuentra en control y cuyas parámetros son $\mu_0=10$ y $\sigma=4.473$. Se toman muestras de tamaño $n=5$ artículos producidos; se sacan 20 muestras, y en la tabla 3.1 se lista el promedio (\bar{x}) de cada muestra tomada. Con estos datos se construyen las cartas \bar{x} y CUSUM, respectivamente.

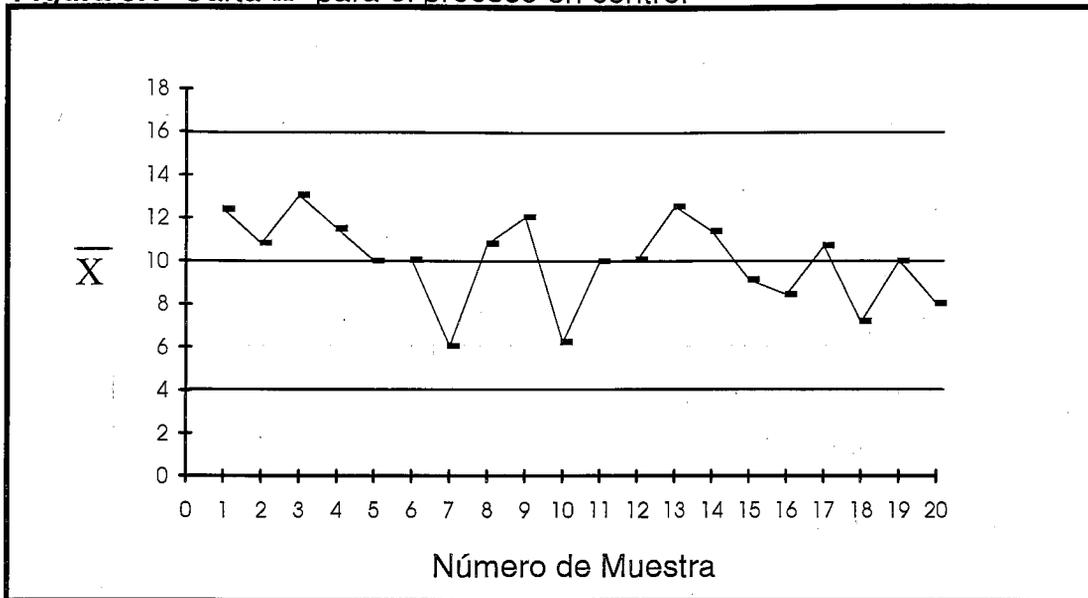
Ambas cartas deberán tener L_0 's iguales; la carta \bar{x} se diseña con un $L_0=370$ y la CUSUM tendrá $L_0=400$. Para casos prácticos una diferencia de 30 unidades en los L_0 's de una carta CUSUM y una Shewhart es realmente insignificante, por lo que se pueden considerar iguales.

Tabla 3.1 Datos del proceso en control

No. MUESTRA	\bar{x}_i
1	12.39
2	10.83
3	13.05
4	11.5
5	10
6	10.05
7	6.06
8	10.81
9	12.04
10	6.25
11	10.01
12	10.09
13	12.52
14	11.38
15	9.13
16	8.45
17	10.7
18	7.18
19	10.01
20	8.03

Se construye la carta \bar{x} , figura 3.1, y se obtiene el comportamiento de un proceso en control.

Figura 3.1 Carta \bar{X} para el proceso en control



Para elaborar la carta CUSUM necesitamos conocer los parámetros d y θ y para obtenerlos debemos hacer uso de las ecuaciones 2.3 y 2.4. En la primera está involucrado el valor de α , la cual deberá tener un valor apropiado para que la carta tenga el $ARL = 400$ que deseamos bajo cero desviación de la media L_0 . Por ello el uso de la ecuación 2.3 se complica y resulta poco práctica, debiéndose buscar la forma de encontrar el valor de los parámetros d y θ por otro medio.

El procedimiento utilizado sera el ya propuesto en el capítulo anterior, utilizando la tabla 2.3, construida por Bowker y Lieberman (1972).

La forma de utilizar dicha tabla es bastante sencilla y es como a continuación se describe:

- Nos ubicamos en el L_0 que deseamos que tenga la carta, en este ejemplo es $L_0=400$
- Buscamos Δ , que es el cambio que deseamos detectar en $\sigma_{\bar{x}}$'s. En este ejemplo Δ es $\Delta=0.5$. Es decir, queremos detectar un cambio de magnitud $0.5\sigma_{\bar{x}}$.
- Buscamos en la tabla el valor que resulta para el parámetro d , y es

$$d=27.3$$

- Se calcula el valor de θ haciendo uso de la ecuación 2.4.

$$\theta = \text{Arctan}(D/2w) = \text{Arctan}((0.5)(2)/(1)(2))$$

$$\theta = 26.5^\circ$$

Nótese que tomamos a $w=1.0$

Las sumas acumuladas se calculan por medio de la ecuación 1.2

$$S_i = \sum_{i=1}^i (\bar{X}_i - \mu),$$

la cual para este ejemplo se transforma en

$$S_i = \sum_{i=1}^{20} (\bar{X}_i - 10).$$

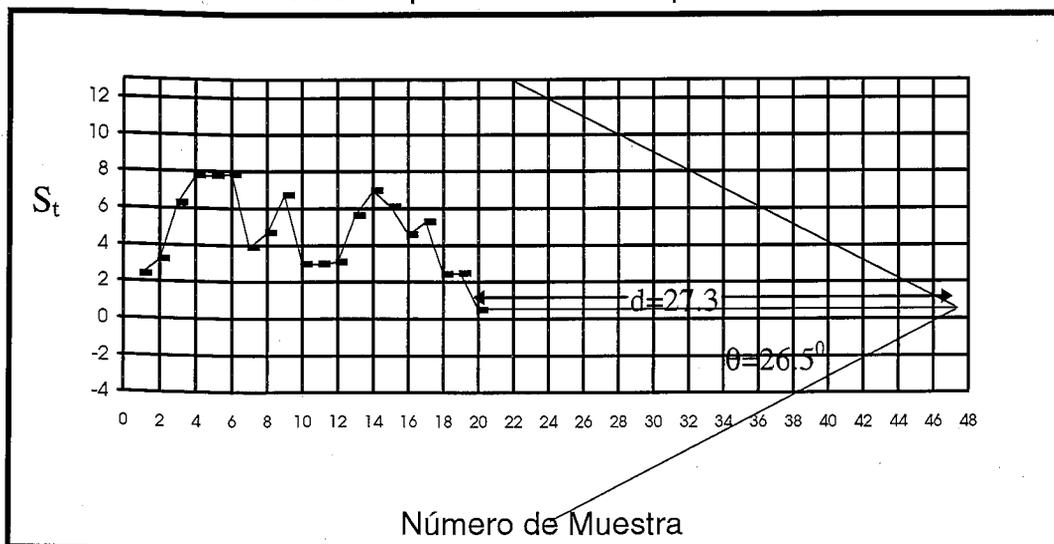
Así, para la muestra (\bar{X}_1) número uno la suma acumulada será $S_1 = (12.39-10)=2.39$. Para \bar{X}_2 la suma acumulada es $S_2=2.39+(10.83-10)=3.22$. Para \bar{X}_3 la suma acumulada es $S_3=3.22+(13.05-10)=6.27$. Así sucesivamente se calcula la suma acumulada para cada una de las muestras, obteniéndose los datos de la tabla 3.2.

Tabla 3.2 S_t para el ejemplo 3.1

No. Muestra	\bar{x}_i	S_t
1	12.39	2.39
2	10.83	3.22
3	13.05	6.27
4	11.5	7.77
5	10	7.77
6	10.05	7.82
7	6.06	3.88
8	10.81	4.69
9	12.04	6.73
10	6.25	2.98
11	10.01	2.99
12	10.09	3.08
13	12.52	5.6
14	11.38	6.98
15	9.13	6.11
16	8.45	4.56
17	10.7	5.26
18	7.18	2.44
19	10.01	2.45
20	8.03	0.48

Con los datos de la tabla 3.2 podemos contruir la carta CUSUM de la figura 3.2.

Figura 3.2 Carta CUSUM para los datos del proceso en control



Se observa en esta gráfica, al igual que en la carta \bar{X} , que el proceso se encuentra bajo control. Esto no es nada sorprendente pues sabemos que los datos vienen de un proceso en control, por lo que para que un punto se salga de los límites de la carta \bar{X} necesitamos tomar en promedio 370 muestras y obtener así una falsa alarma, ya que $L_0=370$ para esta carta, mientras que para obtener un punto fuera de la máscara-V, se necesitan tomar 400 muestras en promedio, ya que su $L_0=400$

Ejemplo 3.2

Ahora se introduce en el proceso un cambio de $0.5\sigma_{\bar{x}}$ en la media y se toman 20 muestras más para construir las cartas \bar{X} y CUSUM, para monitorear el proceso.

En la tabla 3.3 tenemos 40 medias muestrales tomando en cuenta las ya obtenidas con el proceso bajo control.

Tabla 3.3

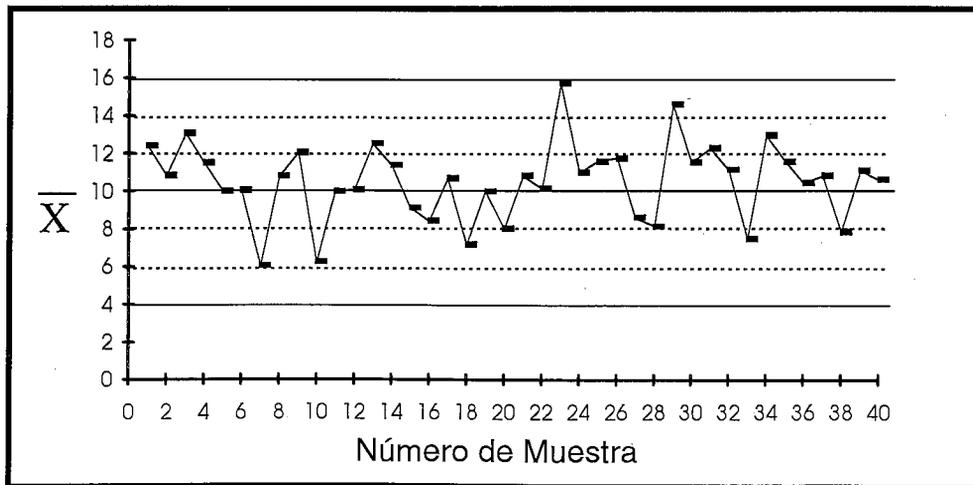
No. Muestra	\bar{x}_i
1	12.39
2	10.83
3	13.05
4	11.5
5	10
6	10.05
7	6.06
8	10.81
9	12.04
10	6.25
11	10.01
12	10.09
13	12.52
14	11.38
15	9.13
16	8.45
17	10.7
18	7.18

Continuación....

19	10.01
20	8.03
21	10.82
22	10.16
23	15.69
24	11.00
25	11.59
26	11.76
27	8.61
28	8.15
29	14.58
30	11.53
31	12.27
32	11.14
33	7.49
34	12.95
35	11.59
36	10.46
37	10.82
38	7.86
39	11.09
40	10.64

Una vez obtenidas las medias muestrales se construye la carta \bar{X} .

Figura 3.3 Carta \bar{X} para los datos del ejemplo 3.2



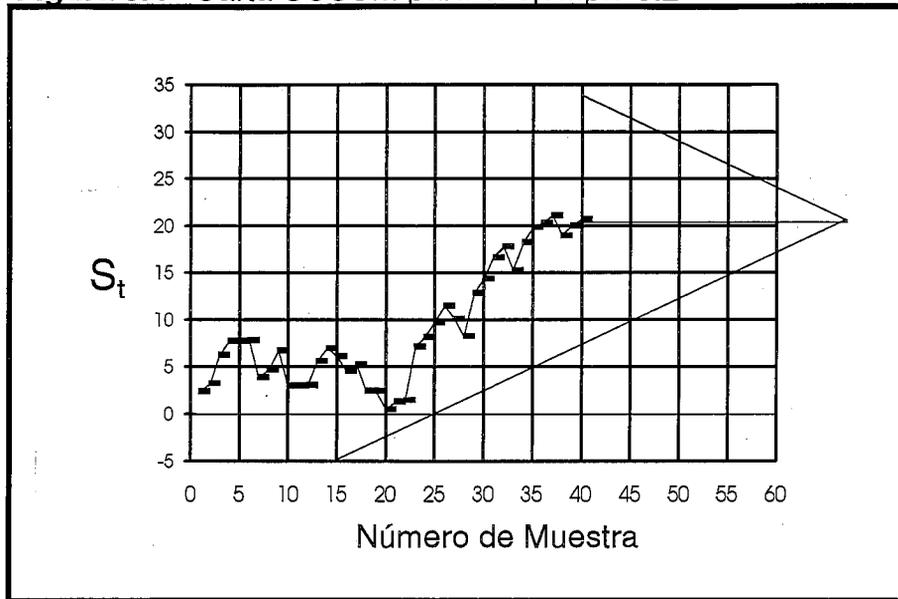
La carta \bar{X} no exhibe ninguna evidencia de que el proceso haya sufrido una desviación de su valor objetivo, tal como realmente ha sucedido. Esto se debe a que el cambio ha sido muy pequeño, sólo de $0.5\sigma_{\bar{X}}$, y para poder detectarlo necesitaríamos más de 120 muestras, ya que como puede observarse en la tabla 2.1 el $L_{0.5}$ para esta carta se encuentra entre 200 y 119.67.

Procedemos a construir la carta CUSUM para el presente ejemplo. Nuevamente será la misma máscara-V del ejemplo 3.1, ya que fué construida para detectar cambios de $0.5\sigma_{\bar{X}}$, y es el cambio que en este caso queremos detectar. Las sumas acumuladas se dan en la tabla 3.4 y la carta aparece en la figura 3.4.

Tabla 3.4 Tabla de sumas acumulativas para el ejemplo 3.2

No. Muestra	\bar{X}_i	S_i	No. Muestra	\bar{X}_i	S_i
1	12.39	2.39	21	10.82	1.3
2	10.83	3.22	22	10.16	1.46
3	13.05	6.27	23	15.69	7.15
4	11.5	7.77	24	11	8.15
5	10	7.77	25	11.59	9.74
6	10.05	7.82	26	11.76	11.5
7	6.06	3.88	27	8.61	10.11
8	10.81	4.69	28	8.15	8.26
9	12.04	6.73	29	14.58	12.84
10	6.25	2.98	30	11.53	14.37
11	10.01	2.99	31	12.27	16.64
12	10.09	3.08	32	11.14	17.78
13	12.52	5.6	33	7.49	15.27
14	11.38	6.98	34	12.95	18.22
15	9.13	6.11	35	11.59	19.81
16	8.45	4.56	36	10.46	20.27
17	10.7	5.26	37	10.82	21.09
18	7.18	2.44	38	7.86	18.95
19	10.01	2.45	39	11.09	20.04
20	8.03	0.48	40	10.64	20.68

Figura 3.4 Carta CUSUM para el ejemplo 3.2



La carta CUSUM tampoco ha detectado la salida de control de $0.5\sigma_{\bar{x}}$ que en realidad ha sufrido el proceso. Esto puede parecer contradictorio ya que se supone que este tipo de cartas detectan cambios pequeños.

Lo que está sucediendo es que, tal como lo expone la tabla 2.3, el ARL para esta carta cuando ha habido un cambio en la media de $0.5\sigma_{\bar{x}}$ es $L_{0.5}=29$. Es decir, que en promedio necesitamos tomar 29 muestras después del cambio, para poder detectarlo y en este ejemplo sólo hemos tomado 20 de ellas, faltando 9 muestras para llegar al promedio para que nuestra carta nos avise de una salida de control.

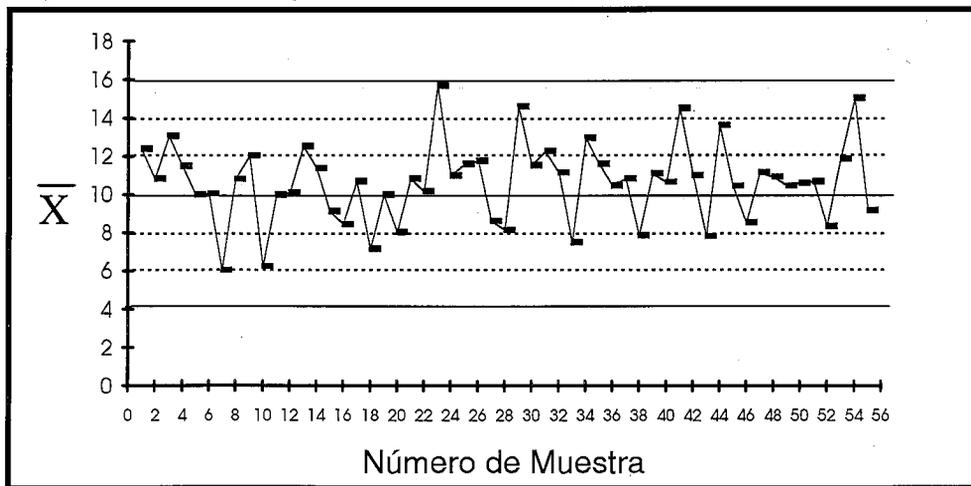
Se toman 15 muestras más para seguir dibujando la carta CUSUM. En la tabla 3.5 aparecen los valores medios de dichas muestras.

Tabla 3.5 Muestras adicionales

No Muestra	\bar{x}_i
1	14.5
2	11
3	7.82
4	13.6
5	10.44
6	8.54
7	11.14
8	10.91
9	10.45
10	10.58
11	10.66
12	8.35
13	11.85
14	15.02
15	9.16

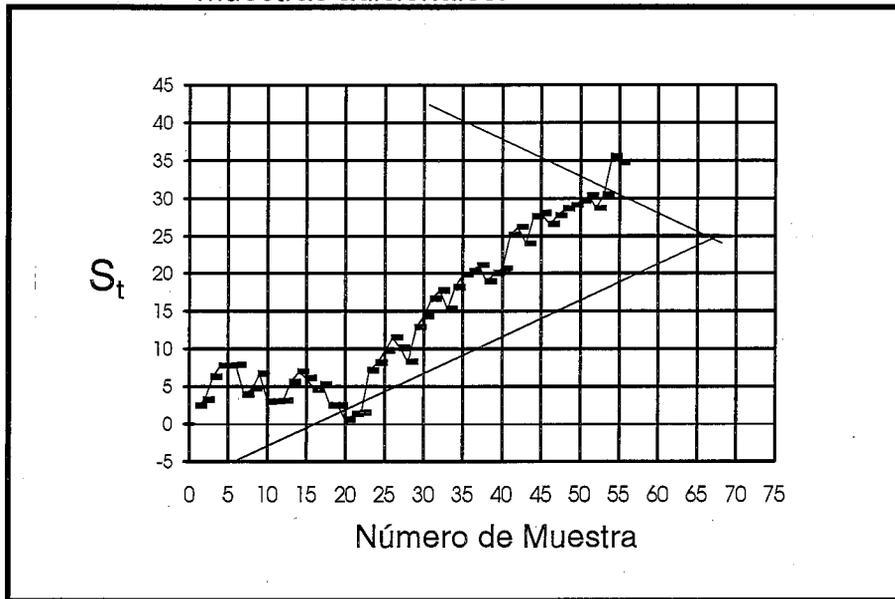
Si construimos la carta \bar{X} (ver figura 3.5) ésta sigue sin mostrar la salida de control.

Figura 3.5 Carta \bar{X} para los datos del ejemplo 3.2



La carta CUSUM con las 15 muestra adicionales se muestra en la figura 3.6

Figura 3.6 Carta CUSUM para el ejemplo 3.2, con las muestras adicionales.



La carta CUSUM ha detectado el cambio en la media del proceso en la observación 42, es decir, lo detectó 22 muestras después de que se produjera el cambio, lo cual demuestra la eficiencia de este tipo de carta para detectar cambios pequeños en el proceso y que además se debe de conocer el L_s de la carta que diseñemos para saber en promedio cuántas muestras deben de ser necesarias para detectar un cambio en la media.

Ejemplo 3.3

Supongamos que en el mismo proceso el cambio que ha sufrido en la media después de la muestra 20, no ha sido de $0.5\sigma_{\bar{x}}$ sino de $1.0\sigma_{\bar{x}}$. Tomamos las primeras 40 muestras, Las primeras 20 muestras del proceso son de cuando aún esta en

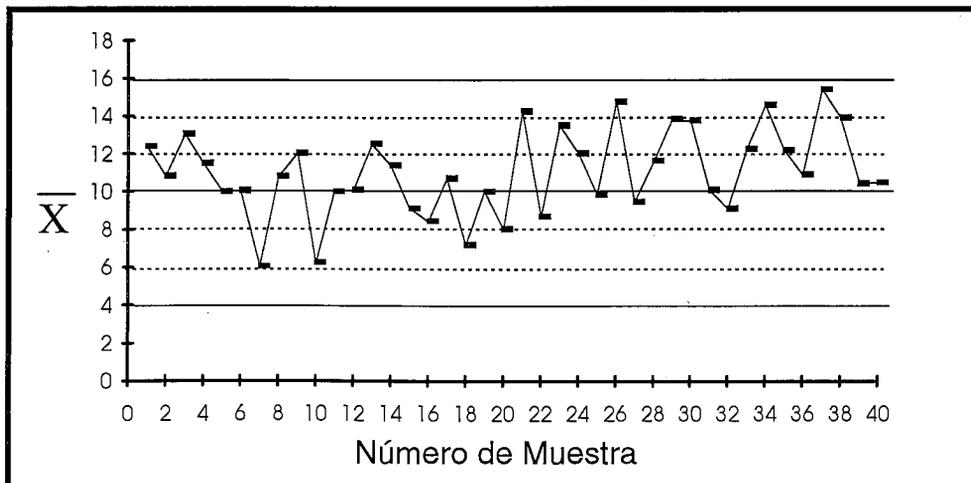
control, y las últimas 20 de cuando ha sufrido el cambio. Las lecturas se muestran en la tabla 3.6.

Tabla 3.6 Datos del problema 3.3

No. Muestra	\bar{X}_i	S_i	No. Muestra	\bar{X}_i	S_i
1	12.39	2.39	21	14.23	4.71
2	10.83	3.22	22	8.69	3.4
3	13.05	6.27	23	13.49	6.89
4	11.5	7.77	24	12	8.89
5	10	7.77	25	9.83	8.72
6	10.05	7.82	26	14.74	13.46
7	6.06	3.88	27	9.45	12.91
8	10.81	4.69	28	11.62	14.53
9	12.04	6.73	29	13.82	18.35
10	6.25	2.98	30	13.74	22.09
11	10.01	2.99	31	10.08	22.17
12	10.09	3.08	32	9.1	21.27
13	12.52	5.6	33	12.26	23.53
14	11.38	6.98	34	14.57	28.1
15	9.13	6.11	35	12.17	30.27
16	8.45	4.56	36	10.89	31.16
17	10.7	5.26	37	15.4	36.56
18	7.18	2.44	38	13.9	40.46
19	10.01	2.45	39	10.43	40.89
20	8.03	0.48	40	10.48	41.37

Con estos datos se construye la carta \bar{X} de la figura 3.7.

Figura 3.7 Carta \bar{X} para los datos del ejemplo 3.3.



La figura 3.7 muestra un proceso controlado, aunque se puede observar una tendencia de los puntos a caer en el lado superior de la carta. La tabla 2.1 señala que para esta carta el $L_{1,0} = 43.89$, cuando existe una desviación de $1.0\sigma_{\bar{x}}$, es decir, que necesitamos tomar en promedio 44 muestras después de que se ha dado la desviación del valor medio, para poder detectar tal cambio. Y en este caso solo hemos tomado 20.

Ahora se intentará detectar el cambio sufrido por medio de una carta CUSUM. Si deseamos detectar cambios de $1.0\sigma_{\bar{x}}$ el diseño de la carta es el siguiente, basándonos en la tabla 2.3.

- Nos ubicamos en el L_0 que deseamos que tenga la carta, en este ejemplo es $L_0=400$
- Buscamos Δ , que es el cambio que deseamos detectar en $\sigma_{\bar{x}}$'s. En el ejemplo Δ es $\Delta=1.0$. Es decir que queremos detectar un cambio de magnitud $1.0\sigma_{\bar{x}}$.
- Buscamos en la tabla el valor que resulta para el parámetro d , y es

$$d = 9.6$$

- Se calcula el valor de θ haciendo uso de la ecuación 1.4.

$$\theta = \text{Arctan}(D/2w) = \text{Arctan}((1)(2)/(2)(1)) = \text{Arctan} 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

Nótese que tomamos a $w=1.0$

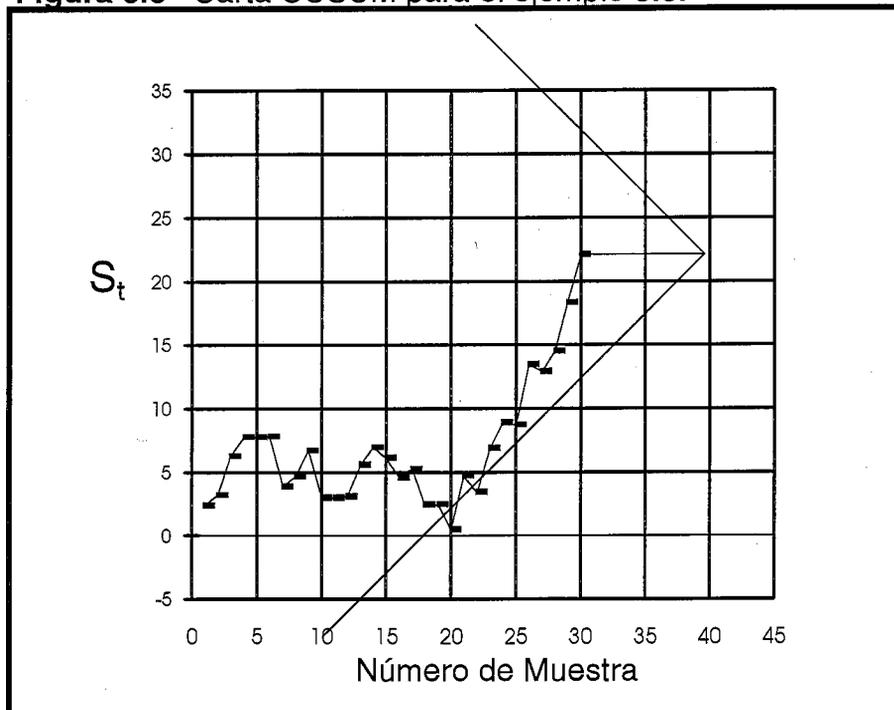
Nótese que el ángulo θ puede calcularse haciendo uso también de la misma tabla 2.3, ya que en ella encontramos que

$$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta=0.5.$$

Despejando y sustituyendo tenemos que

$$\theta=\arctan 0.5 (\sigma_{\bar{x}})/w=\arctan 0.5(2)/1=45^{\circ} .$$

Figura 3.8 Carta CUSUM para el ejemplo 3.3.



Con la carta CUSUM, figura 3.8, se detecta la falta de control en el proceso al tomar la muestra 30, es decir que se detectó la desviación del valor medio después de haber tomado 10 muestras a partir de que sucedió la desviación. Esto coincide con la información que nos proporciona la tabla 2.3, ya que establece que $L_{1,0}=10$.

Por lo tanto en este ejemplo se puede ver que es mejor este tipo de cartas para detectar cambios pequeños en el valor objetivo que las cartas \bar{X} .

Cabe mencionar que si se utilizan las reglas suplementarias de la carta Shewhart, sí se detecta el cambio de nivel en la carta \bar{X} , pero también disminuiría el L_0 .

Ejemplo 3.4

En este ejemplo consideraremos que después de haber tomado las primeras 20 muestras de 5 unidades cada una, el proceso sufre un cambio de $2.0\sigma_{\bar{x}}$, y después de esto tomamos otras 10 muestras (ver tabla 3.7).

Tabla 3.7 Datos del ejemplo 3.4

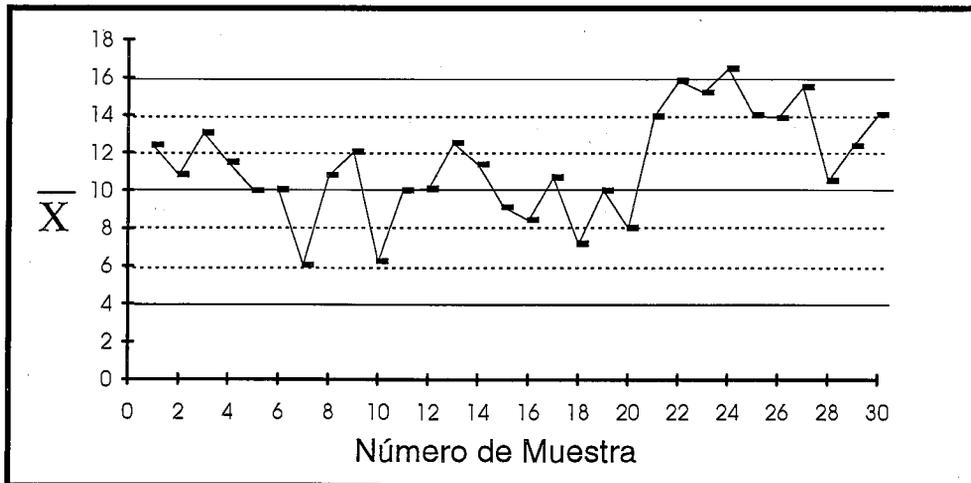
No. Muestra	\bar{x}_i	S_i
1	12.39	2.39
2	10.83	3.22
3	13.05	6.27
4	11.5	7.77
5	10	7.77
6	10.05	7.82
7	6.06	3.88
8	10.81	4.69
9	12.04	6.73
10	6.25	2.98
11	10.01	2.99
12	10.09	3.08
13	12.52	5.6
14	11.38	6.98
15	9.13	6.11
16	8.45	4.56
17	10.7	5.26

Continuación....

18	7.18	2.44
19	10.01	2.45
20	8.03	0.48
21	13.94	4.42
22	15.81	10.23
23	15.2	15.43
24	16.47	21.9
25	13.99	25.89
26	13.85	29.74
27	15.48	35.22
28	10.52	35.74
29	12.36	38.1
30	14.01	42.11

Construimos la carta \bar{X} de la figura 3.9 con los datos de la tabla 3.7.

Figura 3.9 Carta \bar{X} para los datos del ejemplo 3.4.



Esta carta nos muestra que el proceso se ha salido de control pues la observación 24 sale fuera del límite superior de control. La tabla 2.1 establece que para esta carta $L_{1,0}=6.3$, por lo que era de esperar que en las 10 observaciones

tomadas después de que el proceso tuvo un cambio, se encontrara en la carta \bar{x} una señal que avisara de la falta de control.

Se contruye la carta CUSUM para los datos de la tabla 3.7, donde tenemos ya las sumas acumuladas. La carta se construye considerando que nos interesa detectar cambios de magnitud $2.0\sigma_{\bar{x}}$ o mayores, ya que cambios más pequeños no nos interesan. El procedimiento hace uso de la tabla 2.3 y es el siguiente.

- Nos ubicamos en el L_0 que deseamos que tenga la carta, en este ejemplo es $L_0=400$
- Buscamos Δ , que es el cambio que deseamos detectar, en $\sigma_{\bar{x}}$'s. En el ejemplo Δ es $\Delta=2.0$. Es decir que queremos detectar un cambio de magnitud $2.0\sigma_{\bar{x}}$.
- Buscamos en la tabla el valor que resulta para el parámetro d , y es

$$d = 2.5$$

- Se calcula el valor de θ haciendo uso de la ecuación 1.4.

$$\theta = \text{Arctan}(D/2w) = \text{Arctan}((2)(2)/(2)(1)) = \text{Arctan} 2$$

$$\theta = 63.4^\circ$$

Nótese que tomamos a $w=1.0$

Al igual que en el ejemplo 3.2, el angulo θ puede calcularse haciendo uso también de la misma tabla 2.3 y en ella encontramos que

$$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta=1$$

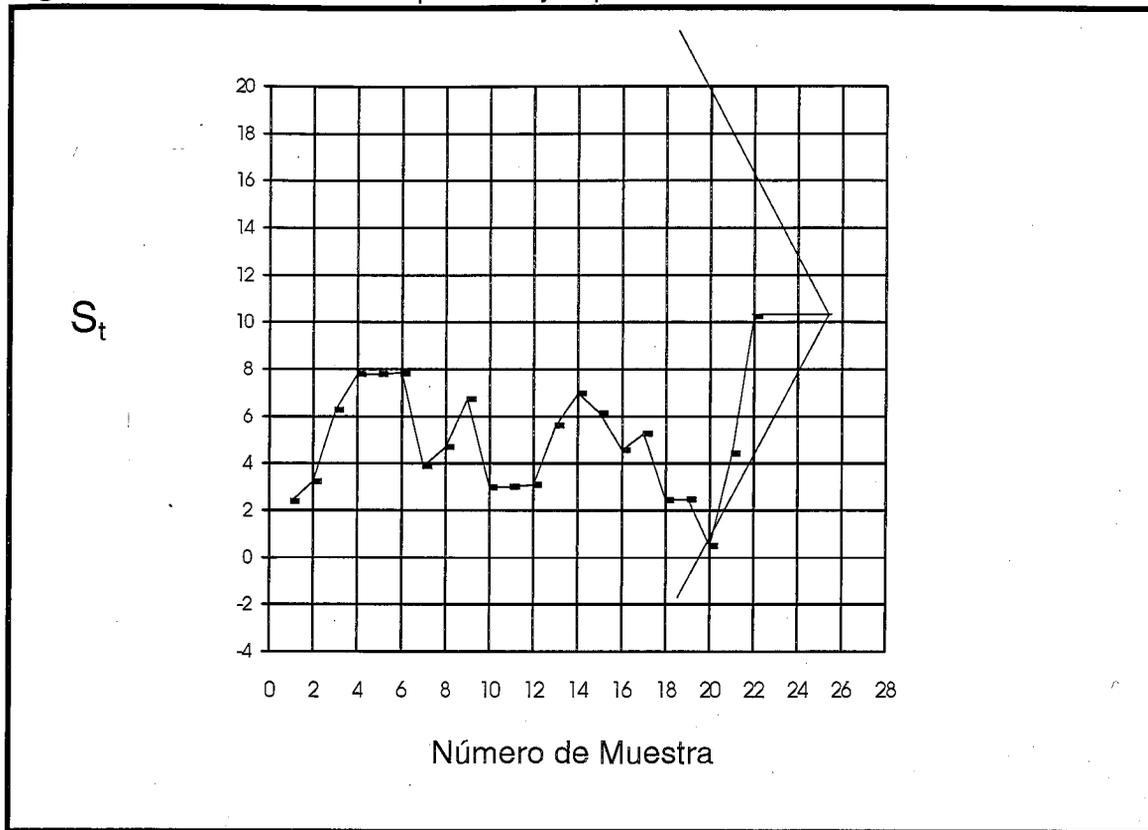
Despejando y sustituyendo tenemos:

$$\theta = \arctan 1 (\sigma_{\bar{x}})/w = \arctan 1(2)/1 = 63.4^{\circ}$$

La figura 3.10 muestra la carta CUSUM contruida con los cálculos anteriores. Esta carta muestra que el proceso se ha salido de control, con sólo dos muestras tomadas después de que se generó la desviación en el proceso. La tabla 2.3 nos dice que en promedio tienen que pasar 3 muestras para detectar un cambio ($L_1=3.3$) en una carta con estas características.

Mientras que en la carta \bar{x} se necesitan en promedio 6 observaciones para detectar este tipo de cambio en la CUSUM sólo se requieren 3 en promedio. Esta diferencia de 3 unidades puede en determinados casos parecer insignificante, mientras que en otros puede ser de gran importancia. Es por ésto que se considera que las cartas CUSUM son más económicas que las cartas \bar{x} , pues ahorran el tiempo empleado en el muestreo, así como en el número de muestras tomadas. Aunque en este caso la diferencia es 3 unidades, en el ejemplo 3.1 se vió que tal diferencia en las unidades necesarias para detectar el cambio por una y otra carta es de más de 100 unidades, diferencia que resulta ser muy significativa.

Figura 3.10 Carta CUSUM para el ejemplo 3.4.



En el campo de la estadística, cuando se pretende comprobar algo por medio de simulaciones, es necesario el realizar un número grande de las mismas para poder establecer la comprobación de lo que se tenga en estudio. En este caso el número de ejemplificaciones es muy reducido, ya que sólo se trata de dar las ejemplificaciones del uso y comportamiento de las cartas CUSUM. Yashchin (1992) realiza una simulación para las cartas CUSUM con distribuciones empíricas.

CAPITULO IV

REVISION BIBLIOGRAFICA

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se analiza la bibliografía consultada que trata sobre la construcción y el uso de las cartas de control CUSUM, para así poder evidenciar la ambigua información que existe sobre la construcción práctica de esta herramienta de control y también resaltar las buenas aportaciones existentes.

Existe un buen número de textos y artículos que abordan el tema de las cartas CUSUM, así que el criterio seguido para la selección de que tipo de publicación se analizaría fue el siguiente: como un objetivo de este trabajo es el de investigar y dar a conocer un método práctico y eficiente para la aplicación de las cartas CUSUM a la gente que lo necesita para su implementación directa, entonces se decidió analizar la bibliografía que es más frecuentada y conocida por este tipo de personas. También se analizan las publicaciones que dieron origen a esta técnica estadística así como artículos importantes de autores que se han dedicado a desarrollarla.

4.2 ANALISIS BIBLIOGRAFICO

4.2.1 Page (1961)

Page (1961) presenta su artículo *Cumulative Sum Charts* haciendo mención de los parámetros θ y d , necesarios para la construcción de las cartas CUSUM, pero no establece en su trabajo la forma de obtenerlos y mucho menos da un ejemplo claro de la técnica de construcción de la carta.

En este trabajo hace énfasis en que para poder comparar una carta CUSUM con una carta Shewhart, ambas deben poseer la misma longitud de corrida promedio (ARL). Page menciona que los límites de control 3σ para las cartas de control Shewhart se han convertido en un dogma, y que sería lamentable que algo parecido sucediera con las cartas CUSUM. Con ello Page quiere establecer que en el diseño de una carta CUSUM lo más importante es definir primero el ARL con el cual queremos que se desempeñe.

4.2.2 Goldsmith y Whitfield (1961).

Goldsmith y Whitfield (1961) tratan de establecer un método para la selección de los parámetros θ y d de las cartas CUSUM. Para ello construyen gráficas de ARL, las cuales servirán de guía en la selección de dichos parámetros. Para los autores el usuario deberá seleccionar un L_0 y un L_s con los cuales desea que trabaje su carta, posteriormente se consultarán las gráficas que ellos construyen y ahí encontrarán los valores de θ y d .

Por otro lado, proponen las dos siguientes ecuaciones para calcular θ y d cuando queremos detectar un cambio de magnitud $k\sigma$ en la media. Para utilizar estas ecuaciones se deben especificar L_0 y L_s con los cuales queremos que trabaje la carta.

$$\log_{10} \log_{10} L_0 = -0.5244 + 0.0398d + 1.1687 \tan \theta + 1.2641 \tan \theta \log_{10} d \quad 4.1$$

$$L_s = \frac{2d \tan \theta}{k - 2 \tan \theta} + \frac{2}{3}, \quad 4.2$$

Se establece que la ecuación 4.2 es apropiada para valores de $1.5 < k < 4$. Inmediatamente después de esta observación realizan un ejercicio donde utilizan las ecuaciones tomando a $k=1$, violando su propia regla. Además de que el intervalo $1.5 < k < 4$ no es apropiado, pues las cartas CUSUM se utilizan para cambios en la media donde k debe estar en un intervalo de $0.5 < k < 2$, por lo que el criterio dado por los autores no tiene sentido, y por lo tanto tampoco lo tienen las ecuaciones propuestas, al menos que se trabaje solo con valores de $1.5 < k < 2.0$.

4.2.3 Ewan (1963)

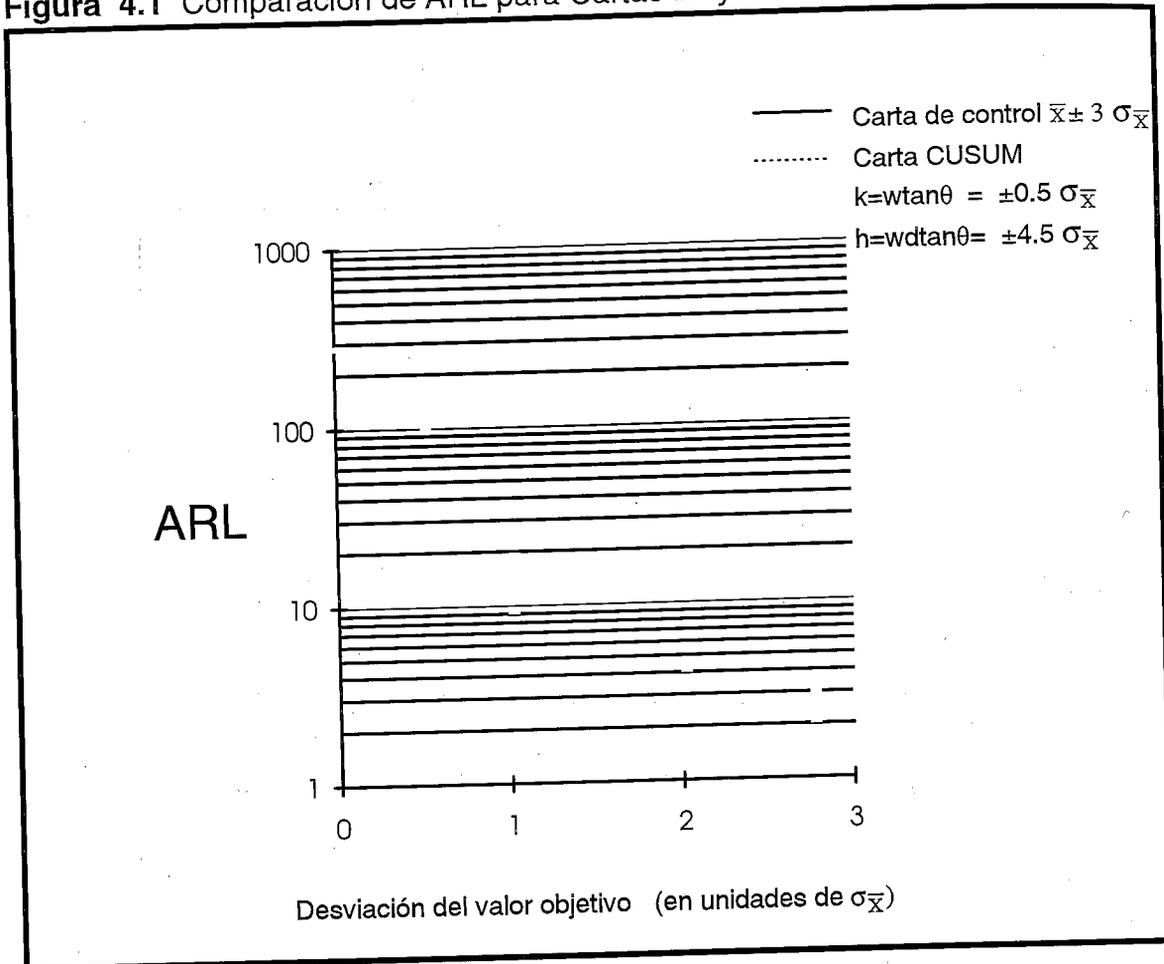
Ewan (1963) escribe: "Aunque los principios generales de las cartas CUSUM son ahora probablemente bien comprendidos y aunque ha existido un considerable énfasis en las cartas como una herramienta visual, se han dado muy pocas guías prácticas bien detalladas". Como se puede ver Ewan se da cuenta del problema y escribe su artículo *When and how to use Cu-Sum charts*, pero paradójicamente en el artículo no incluye ningún ejemplo práctico sobre la construcción de las cartas CUSUM, por lo que el problema de la falta de guías prácticas sobre esta técnica sigue existiendo hasta nuestros días.

Sin embargo Ewan establece varios puntos importantes en su trabajo. Escribe sobre la dificultad que representa el manejo gráfico de las cartas CUSUM debido al factor de escala w que se introduce en la construcción de la carta, por lo que establece que basado en su experiencia en la aplicación de esta técnica encuentra que es mejor la forma tabular que la forma gráfica.

Ewan ilustra también el comportamiento del ARL para una carta \bar{X} y una carta CUSUM, el cual se presenta en la figura 4.1. Puede observarse que el L_0 , es decir el ARL cuando el proceso está en control es igual en ambas cartas. Cuando el proceso ha tenido un salto de $\pm\delta\sigma_{\bar{X}}$ con $\delta \leq 2$ a partir del valor objetivo, el ARL es menor para la carta CUSUM que para la carta \bar{X} . Esto significa que la CUSUM necesita menos muestra para detectar la salida de control del proceso, lo que la hace más económica pues se ahorra en muestreo, tal como se mostró en los ejemplos del capítulo III. Sin embargo cuando el salto de la media del proceso es mayor de $\pm 2\sigma_{\bar{X}}$ la carta \bar{X} empieza a presentar un menor L_s , siendo mejor en este caso que la carta CUSUM. De aquí las recomendaciones encontradas en la bibliografía en el sentido de que las cartas CUSUM deben

manejarse cuando se deseen detectar cambios entre $\pm 0.5 \sigma_{\bar{x}}$ y $\pm 2 \sigma_{\bar{x}}$ y las cartas \bar{x} cuando se quieran detectar cambio mayores a $\pm 2 \sigma_{\bar{x}}$.

Figura 4.1 Comparación de ARL para Cartas \bar{x} y CUSUM



Ewan resume las ventajas de las cartas CUSUM, estableciendo que:

- Lo más importante de éstas es el hecho de que visualmente es fácil detectar un cambio en la media del proceso, por el cambio de la pendiente en los puntos que son graficados en la carta.

- La segunda ventaja es que se puede visualizar fácilmente el momento en el cual ha ocurrido el cambio dentro del proceso, visualizando el punto a partir del cual cambia la pendiente de la ruta seguida por los puntos graficados en la carta.
- La tercer ventaja es la mayor sensibilidad que presentan las cartas CUSUM para cambios de entre $0.5 \sigma_{\bar{x}}$ y $2 \sigma_{\bar{x}}$ a partir del valor objetivo.

Para ejemplificar las dos primeras ventajas de la carta CUSUM Ewan presenta un ejemplo gráfico poco convincente, ya que compara una carta \bar{x} con una CUSUM, que se supone representan los mismos datos. No da los valores de los datos y además las gráficas son malas, pues los datos están demasiado encimados, dando una idea de que son puestos así para forzarlos a coincidir con lo que él llama "ventajas de la carta CUSUM". Resultando ésta una mala ejemplificación.

Por otro lado Ewan expone las desventajas de las cartas CUSUM apuntando hacia las dificultades que presenta la carta al momento de querer dibujarla. Por ello es que si el autor quería escribir un trabajo que sirviera como guía práctica debió incluir al menos un ejemplo construyendo las cartas CUSUM, ya que como el mismo señala, ésto es lo más falta para que la herramienta pueda ser utilizada en la práctica por la gente que la necesita.

4.2.4 Bowker y Lieberman (1972).

Bowker y Lieberman (1972) en su obra *Engineering Statistics*, hacen mención de las cartas CUSUM sin dar ejemplos de la aplicación de las mismas y establecen que los parámetros necesarios para su construcción son θ y d .

La aportación importante de esta obra es que proporciona una tabla con la cual el usuario puede obtener los valores de dichos parámetros con sólo determinar el L_0 que tendrá la carta CUSUM a utilizar así como la desviación de la media del proceso que interesa detectar. La tabla construida por Bowker y Lieberman se muestra en la tabla 4.1.

Bowker y Lieberman hacen énfasis en que la manera de comparar una carta CUSUM con una Shewhart es construirlas con el mismo L_0 . Definen el ARL cuando el proceso está en control (L_0) como el número promedio de puntos muestrales que hay que graficar antes de tener un punto fuera de los límites de control, siendo éste una falsa alarma. También define el ARL cuando el proceso a tenido un salto $\pm\delta\sigma_{\bar{x}}$ a partir de la media del proceso como L_s , representando el número promedio de puntos muestrales que necesitamos graficar para que un punto se salga de los límites de control, detectándonos así el estado de fuera de control.

Tabla 4.1 Parámetros para las cartas CUSUM

Δ	$L_0 = \text{ARL cuando el proceso está en control}$						
		50	100	200	300	400	500
0.25	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.125			0.195		0.248
	d	47.6			46.2		37.4
	L(0.25)	28.3			74		94
0.5	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.25	0.28	0.29	0.28	0.28	0.27
	d	17.5	18.2	21.4	24.7	27.3	29.6
	L(0.5)	15.8	19	24	26.7	29	30
0.75	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375
	d	9.2	11.3	13.8	15	16.2	16.8
	L(0.75)	8.9	11	13.4	14.5	15.7	16.5
1.0	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	d	5.7	6.9	8.2	9	9.6	10
	L(1.0)	6.1	7.4	8.7	9.4	10	10.5
1.5	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
	d	2.7	3.3	3.9	4.3	4.5	4.7
	L(1.5)	3.4	4	4.6	5	5.2	5.4
2.0	$(w/\sigma_{\bar{x}})\tan\theta$	1	1	1	1	1	1
	d	1.5	1.9	2.2	2.4	2.5	2.7
	L(2.0)	2.26	2.63	2.96	3.15	3.3	3.4

$\Delta =$ Desviación respecto al valor objetivo (en $\sigma_{\bar{x}}$ s)

Para el uso de la tabla 4.1, supongamos que se quiere detectar un cambio de $\pm 1.0\sigma_{\bar{x}}$ respecto del valor objetivo μ_0 y tener una carta con un $L_0=500$, así como también se conoce que $\sigma_{\bar{x}}=1$. En la tabla 2.1 se encuentra que una carta CUSUM con tales características tendrá que cumplir la relación

$$(w / \sigma_{\bar{x}}) \tan \theta = 0.5,$$

por lo que si el factor de escala (w) es igual a 1, entonces despejando obtenemos que

$$\theta = 26.57^\circ.$$

De la misma tabla se obtiene que

$$d = 10.$$

Con estos parámetros obtendremos una carta CUSUM con

$$L_0 = 500$$

y

$$L_1 = L(1) = 10.5,$$

lo cual significa que si se da un cambio de $\pm 1.0\sigma_{\bar{x}}$ respecto del valor objetivo μ_0 la carta lo detectará en promedio 10.5 puntos muestrales después de haber ocurrido el cambio. Si quisiéramos que lo detectara antes, entonces de la tabla 2.3 se toman los valores

$$(k / \sigma_{\bar{x}}) \tan \theta = 0.50$$

$$\theta = 26.57^\circ$$

$$d = 6.9,$$

con los cuales se tiene

$$L_1 = L(1.0) = 7.4,$$

es decir, que el salto en la media se detectaría 7.4 puntos muestrales después de haber ocurrido. Esto último parece mejor para nuestro control, pero hay que tomar en cuenta, que ahora $L_0 = 100$, lo cual significa que cada 100 puntos muestrales tendremos una falsa alarma. El uso de esta tabla queda ampliamente comprendido en los ejemplos del capítulo III.

2.2.5 Lucas (1976).

Lucas (1976) hace notoria la necesidad de que para comparar una carta Shewhart con una CUSUM, ambas deben poseer el mismo ARL cuando el proceso está en control. Menciona que las cartas CUSUM son mejores que las cartas Shewhart para detectar cambios pequeños de la media del proceso, pero que si a las últimas les añadimos las pruebas adicionales existentes para considerar que un proceso se ha salido de control, entonces las cartas Shewhart pueden ser tan buenas como las CUSUM en la detección de pequeñas desviaciones del valor objetivo. Sin embargo como lo demuestra Champ y Woodall (1987) esto no es del todo cierto, ya que al considerar las varias pruebas simultáneamente aumenta dramáticamente el número de falsas alarmas, es decir, aumenta el L_o . Y por otro lado como lo menciona Lucas, también aumenta la dificultad de la interpretación de las cartas Shewhart.

Lucas diseña las cartas de control obteniendo los parámetros h y k , y no por la obtención de θ y d , ya que según aduce dicha parametrización es más conveniente, aunque no dice el porqué. Presenta un ejemplo pero no construye la carta CUSUM, a pesar de que el título del artículo es *The design and use of V-Mask control schemes*. Aunque si contiene lo que él llama un caso de estudio, no llega a contruir la máscara-V, y tampoco da los datos utilizados.

4.2.6 Feigenbaum (1983).

Feigenbaum (1983) el creador del término Calidad Total, en la tercera edición de su obra Total Quality Control, parece darse cuenta de la importancia de las cartas CUSUM y las incluye, pero sólo menciona su existencia sin dejar bien definido en que radica su importancia, ni tampoco establece una técnica de elaboración y mucho menos se da un ejemplo de las mismas. Tal vez se deba esto a que él considera suficiente con hacer mención de las mismas y que el interesado deberá dirigirse a una obra especializada en control estadístico para conocer la técnica de las cartas CUSUM a fondo. Pero creo que por eso mismo debería de dejar claro cuales son las ventajas de las cartas CUSUM, ya que sólo menciona que son utilizadas cuando se quiere mayor sensibilidad de las cartas; pero sabemos que eso no es totalmente cierto, pues las cartas Shewhart son más sensibles a cambios grandes que las CUSUM. Por lo que si la obra quiere hacer las veces de guía para la persona interesada en el control de calidad, al menos en este punto no lo logra.

4.2.7 Wadsworth, Stephens y Godfrey (1986).

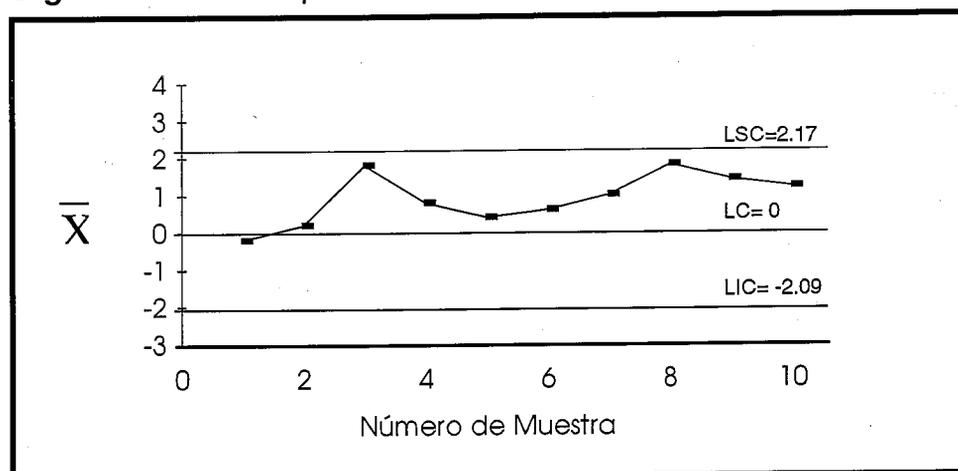
Wadsworth, Stephens y Godfrey (1986), escriben sobre la carta CUSUM y manejan un ejemplo en el cual construyen una carta \bar{x} y una CUSUM. Los datos con los que trabajan se muestran en la tabla 4.2.

Tabla 4.2

No. Muestra	\bar{x}_i	$\Sigma(\bar{x}_i - 0.0)$
1	-0.2	-0.2
2	0.2	0.0
3	1.8	1.8
4	0.8	2.6
5	0.4	3.0
6	0.6	3.6
7	1.0	4.6
8	1.8	6.4
9	1.4	7.8
10	1.2	9.0

El proceso del cual se toman las muestras tiene $\mu=0$ y $\sigma_{\bar{x}}=0.71$, además $n=5$. La carta \bar{X} se muestra en la figura 4.2.

Figura 4.2 Carta \bar{x} para los datos de la tabla 2.4

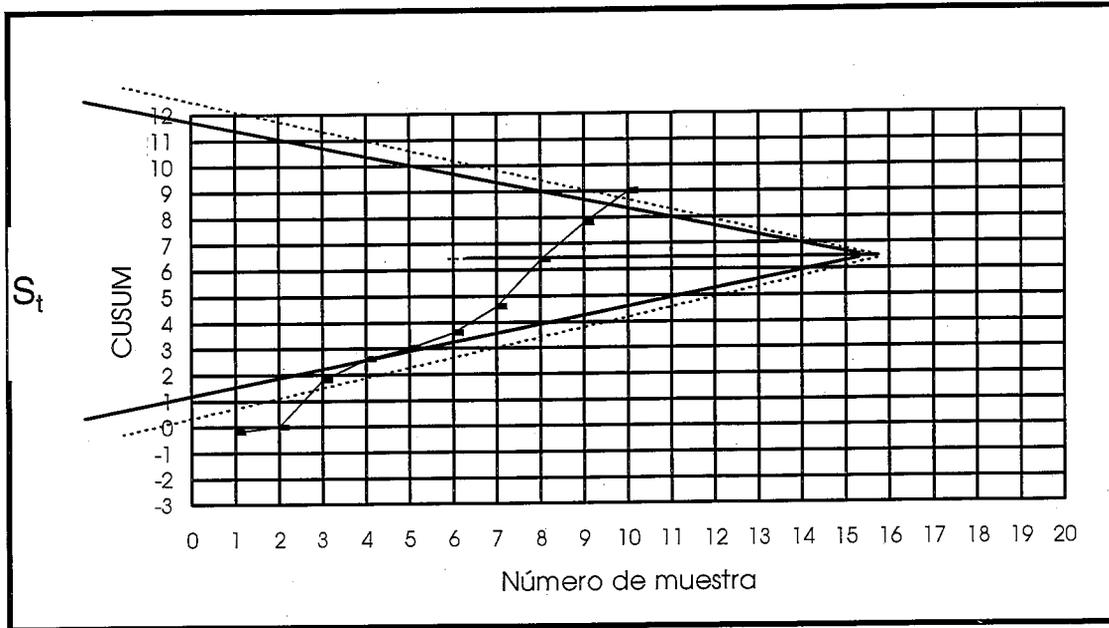


Como se puede observar en la figura 4.2, la carta \bar{X} no muestra ningún punto fuera de los límites de control 3σ , por lo que se podría decir que el proceso se encuentra en control. Sin embargo, existen 8 puntos consecutivos por encima de la

línea central, lo cual muestra falta de control en el proceso (prueba adicional de la Western Electric Company (1956), que el autor añade a la carta).

La carta CUSUM para los mismos datos se muestra en la figura 4.3.

Figura 4.3 Carta CUSUM para los datos de la tabla 4.2



La línea punteada representa la máscara V calculada por el autor, la cual corresponde a una carta CUSUM con un L_0 aproximado de 500, pero este L_0 es muy diferente al L_0 de 370 ($L_0=1/\alpha=1/0.0027$) de la carta \bar{X} de la figura 2.2, por lo cual no es muy aceptable la comparación realizada por el autor.

Se construye una máscara V con un L_0 de 400, el cual es bastante aproximado a 370, ésta se representada por la línea continua en la figura 4.3. Los cálculos son los siguientes.

Establecemos que:

$$\alpha = 0.00823$$

$$D = 1\sigma_{\bar{x}} = 0.71 \quad w = 2.11 \quad \sigma_{\bar{x}} = 1.5$$

$$d = -\left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln \alpha \quad \text{donde} \quad \delta = \left(\frac{D}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \left(\frac{0.71}{1.5}\right) = 1$$

sustituyendo obtenemos: $d = (2/(1)^2)(-\ln 0.00823)$

$$d = 9.6$$

de ec. 1.4 obtenemos: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D}{2w}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.71}{2(1.5)}\right)$

$$\theta = 13.3^\circ$$

Los autores observan que la carta CUSUM también detecta la falta de control. La diferencia radica en que la carta CUSUM detectó el problema en la observación 8, mientras que la carta \bar{x} lo hizo en la muestra 9. Esto puede ser una gran diferencia cuando se está trabajando con muestras tomadas en intervalos de tiempo muy espaciados, lo cual significa un ahorro muy importante en el proceso. Pero esta comparación es inválida porque la carta CUSUM tiene un $L_0=400$ y la Shewhart con la prueba adicional tiene $L_0=95$, y se trata de comparar cartas con el mismo L_0 , tal como se realizó en la ejemplificaciones del capítulo III y como lo proponen Page (1961), Ewan (1963), Bowker y Lieberman (1972), Lucas (1976), y Duncan (1991).

También se debe observar que la gráfica trazada por el autor apenas detectó la falta de control, mientras que la máscara de la línea continua deja bastante claro que el proceso está fuera de control, por lo que es importante determinar bien un L_0 apropiado, y los autores no lo hicieron al querer comparar ambas cartas.

4.2.8 Woodall (1986)

Woodall (1986) escribe un artículo titulado *The Design of CUSUM Quality Control Charts*, por lo que se podría esperar encontrar un forma de la construcción de la carta CUSUM, pero no es así ya que lo que alcanza a tratar a ese respecto no es claro ni tampoco ejemplifica el método. Sin embargo analiza dos puntos que son importantes:

- El primero se refiere a que no por ser las cartas CUSUM eficientes para detectar cambios pequeños en la media del proceso, son las mejores para todo tipo de proceso, ya que habrá algunos en los cuales una desviación pequeña de la media es tolerable y por otro lado sería costoso el tratar de ajustar la desviación e incluso se podría aumentar la variación.
- El otro punto es el referente a que para detectar cambios grandes en la media del proceso, las cartas CUSUM son menos eficientes que la cartas Shewhart.

Por lo que se deben de tener ambos puntos en mente en el momento de seleccionar el tipo de carta necesario para controlar un proceso determinado.

4.2.9 Peter Jhon (1990).

Peter Jhon (1990) escribe en su texto *Statistical Methods in Engineering and Quality Assurance* sobre las cartas CUSUM, debido al título de la obra se espera que el tema sea tratado de una manera objetiva, práctica y sencilla. Pero al examinar la manera en que el tema es desarrollado se observa que la técnica propuesta para la obtención de las cartas CUSUM empieza siendo confusa al introducir un parámetro que el autor denomina δ y no define la obtención del mismo, ni tampoco hace alguna referencia sobre este parámetro.

Se propone en el texto un ejercicio en el cual el autor da sin ninguna, explicación, el valor de $\delta = 0.5$ y por medio de éste calcula el ángulo θ por medio de la relación:

$$\theta = \arctan (\delta/2)$$

obteniendo el valor de $\theta = 14^\circ$. Además también construye la carta CUSUM, sin hacer mención del factor de escala w , necesario para su construcción, y sin coincidir el ángulo calculado con el trazado en la carta.

Posteriormente, en el texto, se obtiene la ecuación lineal de los brazos de la máscara V y por medio de ella se analiza y maneja la carta CUSUM, lo cual complica la técnica, que en principio debería ser presentada de una manera clara y entendible para la persona que busca una guía para su implementación.

Otra falla de esta obra es que no hace establece en ningún momento las ventajas de la carta CUSUM, o el porqué de su importancia dentro del control estadístico, ni menciona la importancia del ARL para la construcción de tal herramienta. Sólo menciona que las cartas CUSUM detectan más rápidamente los cambios en la media del proceso que las cartas Shewhart, pero ya sea mencionado en este trabajo que eso no siempre es cierto, pues, para detectar cambios mayores de 2σ , son mas rápidas las cartas Shewhart (Ewan 1963).

4.2.10 Montgomery (1991).

Montgomery (1991) hace un análisis de la ventaja de las cartas CUSUM sobre las cartas Shewhart \bar{X} resaltando que éstas últimas tienen buena sensibilidad para saltos en la media entre 1.5σ a 2σ o más grandes, pero que para cambios más pequeños su sensibilidad no es buena, mientras que las CUSUM sí detectan cambios pequeños.

El autor introduce el siguiente ejercicio:

Considerar los datos de la tabla 4.3, columna **a**. Los primeros 20 datos fueron tomados de una distribución normal con media $\mu=10$ y una desviación estándar de $\sigma=1$. Estos 20 primeros datos son dibujados en una carta X la cual aparece en la figura 4.4. Para esta carta los límites superior e inferior y la línea central están dados por

$$LSC = 13$$

$$LC = 10$$

$$LIC = 7$$

y se observa que estos 20 datos aparecen en control dentro de la carta, lo cual efectivamente es cierto.

Posteriormente se obtuvieron otras 10 observaciones las cuales provienen de una distribución normal con media $\mu=10.5$ y una desviación estándar de $\sigma=1$, es decir que el proceso ha experimentado un cambio en la media de 0.5σ . Las últimas 10 observaciones se incluyen en la carta X y ninguno de los puntos cae fuera de los límites de control, lo cual significa que la carta refleja un control en el proceso y no

detecta el cambio de 0.5σ que existió en la media. Con lo anterior el autor intenta demostrar que las cartas X tienen poca sensibilidad para detectar cambios de menos de 1.5σ en la media del proceso, y que la opción es utilizar una carta CUSUM cuando se desee detectar dichos cambios.

Tabla 4.3 Datos

	a	b
Muestra (i)	X_i	S_i
1	9.45	-0.55
2	7.99	-2.56
3	9.29	-3.27
4	11.66	-1.61
5	12.16	0.55
6	10.18	0.73
7	8.04	-1.23
8	11.46	0.23
9	9.2	-0.57
10	10.34	-0.23
11	9.03	-1.2
12	11.47	0.27
13	10.51	0.78
14	9.4	0.18
15	10.08	0.26
16	9.37	-0.37
17	10.62	0.25
18	10.31	0.56
19	8.52	-0.92
20	10.84	-0.08
21	10.4	0.32
22	8.83	-0.85
23	11.79	0.94
24	11	1.94
25	10.1	2.04
26	10.58	2.62
27	9.88	2.5
28	11.12	3.62
29	10.81	4.43
30	10.02	4.45

El autor nos da el método de construcción de la carta CUSUM y grafica una carta CUSUM con los datos de su ejemplo, la cual se ilustra en la figura 4.7.

Figura 4.4 Carta X para los datos de la tabla 4.1

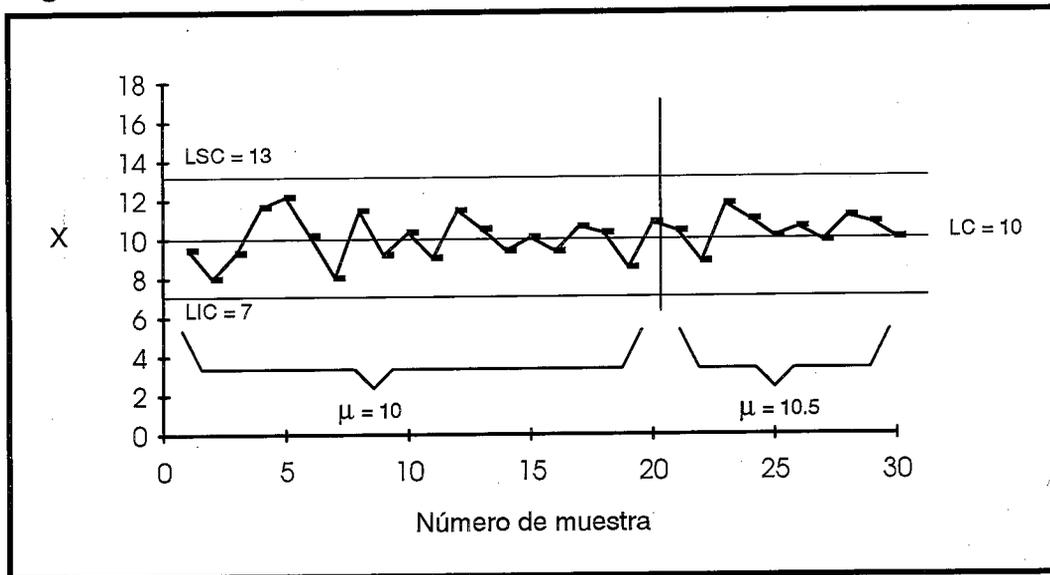
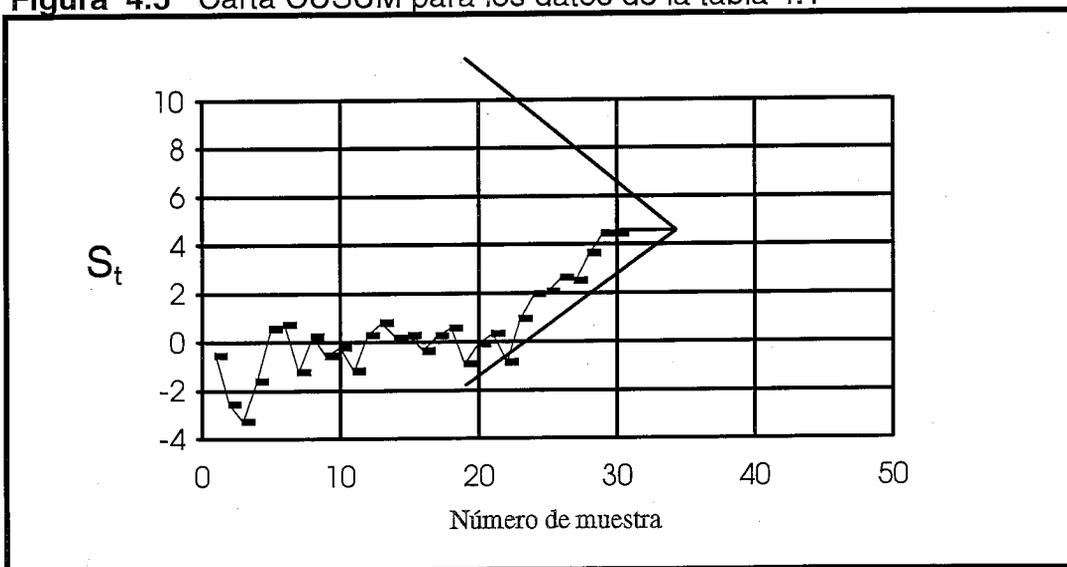


Figura 4.5 Carta CUSUM para los datos de la tabla 4.1



El autor quiere demostrar que la carta CUSUM si detecta el cambio de 0.5σ en la media, ya que en la figura 2.5 sí aparece el punto 22 fuera de control. A decir verdad el autor nunca menciona con que parámetros fue construida esta carta, es decir que la construye arbitrariamente y a su antojo hace aparecer un punto fuera de control. Lo mas adecuado es que se construya una carta de control con el mismo ARL que la carta \bar{X} construida en la figura 4.4.

En el texto se construye nuevamente la carta CUSUM para el mismo ejemplo dando, ahora sí, los calculos y el valor de los parámetros para la carta, pero no se llega a utilizar la carta construida para analizar los datos del ejemplo, ya que de haberlo echo, no se hubieran detectado el cambio del proceso y por lo tanto se hubiera contradicho con la carta ya construida anteriormente en la cual si se detecto la salida de control.

Por último el autor vuelve a construir por tercera vez la carta para el mismo ejemplo, pero ahora si toma en cuenta el ARL para su construcción, pero la calcula para un $L_0 = 500$ (es decir que cada 500 muestras en promedio, la carta tendrá una falsa alarma), el cual es mayor que el L_0 de la carta \bar{X} de la figura 4.6 que es $L_0=370$. Y aunque se hacen los cálculos para la carta CUSUM con $L_0=500$, no se construye en el texto. Dicha carta que el autor no expone se presenta aquí en la figura 4.6.

Para construir la carta se supuso que β es pequeño (ya que el autor no menciona su valor) y se hace uso de la ecuación 2.3, que supone un β pequeño. Los cálculos se presentan a continuación.

Establecemos que: $\alpha=0.005$ $D=1.5\sigma_{\bar{x}} = 1.5\sigma = 1.5$ $w=1\sigma_{\bar{x}} = 1 \sigma = 1$

$$d = -\left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln \alpha \quad ; \text{ donde } \delta = \left(\frac{D}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \left(\frac{D}{\sigma}\right) = \left(\frac{1.5}{1}\right) = 1.5$$

sustituyendo obtenemos: $d = (2/(1.5)^2)(-\ln 0.005)$

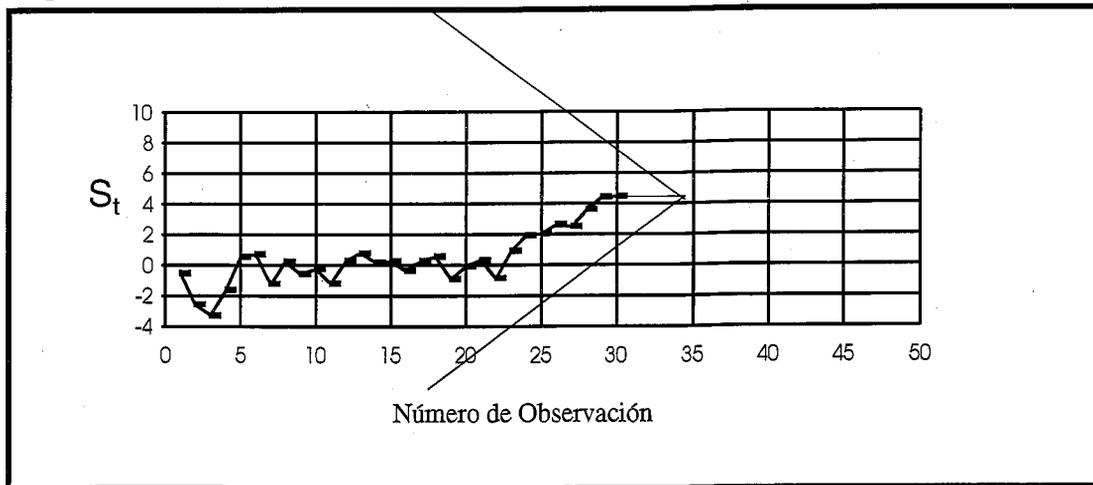
$$d = 4.7$$

de ec. 1.4 obtenemos: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D}{2w}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.5}{2}\right)$

$$\theta = 36.8^\circ$$

En este caso $\sigma_{\bar{x}} = \sigma$ debido a que el tamaño de la muestra es $n=1$.

Figura 2.6 Carta CUSUM para $\alpha=0.005$, $D=1.5\sigma$ y $k=1\sigma$.



En la figura 4.6 se observa claramente que ningún punto se sale de los brazos de la máscara, lo cual nos dice que no existe cambio en la media del proceso. Como ya se mencionó, esta carta no la incluye Montgomery en su texto, ya que no

estaría demostrando que la carta CUSUM sí detecta este tipo de cambios, sólo se limita a desarrollar los cálculos para conocer d y θ , pero no grafica la carta. Cabe mencionar que él obtiene un valor de $\theta=20.55^\circ$, mientras que aquí se obtiene un valor de $\theta=36.7^\circ$, lo que se debe a que el autor establece un valor de $w=2\sigma_{\bar{x}}$, mientras que aquí se toma $w=1\sigma_{\bar{x}}$. Si se toma el primer valor, la gráfica resulta muy incómoda, se "aplasta", por ello se toma el segundo valor.

Es necesario entonces establecer cual sería la carta CUSUM correcta que se debe construir para compararla con la carta \bar{x} y así analizar objetivamente la ventaja de la primera.

Consideraremos que si una carta \bar{x} y una CUSUM tienen el mismo L_0 (El mismo ARL cuando el proceso está en control), entonces pueden ser comparadas equitativamente en su efectividad. Por lo tanto se tiene que construir una carta CUSUM que tenga un $L_0=370$, tal como sucede con la carta \bar{x} de la figura 4.4. En este caso se construirá una carta CUSUM con $L_0=400$, el cual es lo bastante cercano a un $L_0=370$.

Para una carta de $L_0=400$ con una sensibilidad para detectar cambios de 0.5σ y con $\alpha=0.0329$, tenemos los siguientes cálculos:

Establecemos que: $\alpha=0.0329$ $D=0.5\sigma_{\bar{x}} = 0.5\sigma = 0.5$ $w=1\sigma_{\bar{x}} = 1\sigma = 1$

$$d = -\left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln \alpha \quad \text{donde} \quad \delta = \left(\frac{D}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \left(\frac{D}{\sigma}\right) = \left(\frac{0.5}{1}\right) = 0.5$$

sustituyendo obtenemos: $d = (2/(0.5)^2)(-\ln 0.0329)$

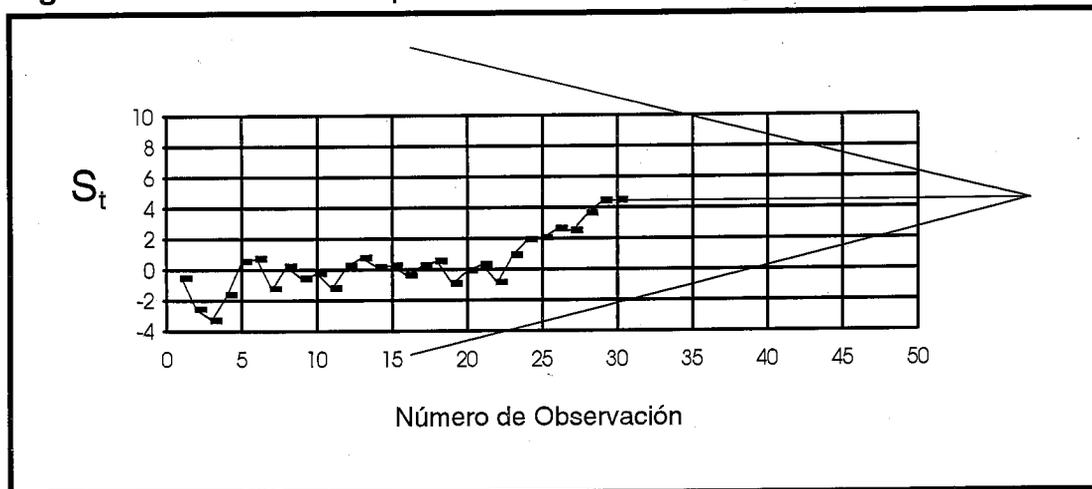
$$d = 27.3$$

de ec. 1.4 obtenemos: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D}{2w}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{2}\right)$

$$\theta = 14.0^\circ$$

Con estos datos se obtiene la carta de control CUSUM, que aparece en la figura 2.7.

Figura 2.7 Carta CUSUM para $\alpha=0.0329$, $D=0.5\sigma$ y $k=1\sigma$.



Realmente en esta carta tampoco observamos un proceso fuera de control lo cual significa que ni la carta \bar{x} ni la carta CUSUM está detectando el cambio de 0.5σ en la media del proceso. Esto pudiese llevar a decepcionar a la persona que busque en la carta CUSUM, lo que la teoría en el texto establece. Pero no debe de ser así, ya que existe una explicación al respecto, que en el texto no aparece, y es el que la carta CUSUM con $\alpha=0.0329$ tiene un $ARL = L_{0.5}=29$ para cuando ha existido un cambio en la media de 0.5σ . Esto significa que cuando en este ejemplo tengamos un cambio de 0.5σ en la media, en promedio necesitaremos tomar 29 muestras, a partir del momento del cambio, para poder detectarlo en la carta. Los datos de los que disponemos sólo tienen 10 observaciones después de que sucedió el cambio, lo cual explica el porqué la carta no presenta al menos un punto fuera de los límites de control.

Montgomery ilustra un procedimiento para desarrollar la técnica CUSUM pero no con un gráfica sino de manera tabular. Dicho método puede ser más útil para quién desee llevar a cabo el método por medio de una computadora. La técnica consiste en separar la suma acumulada en los dos componentes siguientes.

$$S_H(i) = \text{máx} [0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + S_H(i-1)] \quad 2.1$$

y

$$S_L(i) = \text{máx} [0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_i + S_L(i-1)] , \quad 2.2$$

donde: $K = D/2$, $S_L(i)$ y $S_H(i)$ son los componentes de las sumas acumuladas inferior y superior, respectivamente. Y $S_L(0) = S_H(0) = 0$.

El intervalo de decisión es

$$H = w \tan(\theta) = dD/2 \quad 2.3$$

y el criterio a seguir es considerar que el proceso se ha salido de control, cuando $S_L(i)$ ó $S_H(i)$ exceden el valor de H . A continuación se desarrolla esta técnica utilizando los datos de la tabla 2.3.

Conocemos que $n=1$, $\mu_o=10$, $\sigma=1$ y establecemos que la magnitud del cambio que nos interesa detectar es de $D = 0.5\sigma = 0.5$, por lo que

$$K=0.5/2=0.25$$

y

$$H = (0.5)(27.3)/2 = 6.80.$$

Así, para este ejercicio las ecuaciones 2.1 y 2.2 se definen por

$$S_H(i) = \text{máx} [0, \bar{x}_i - (10.25) + S_H(i-1)]$$

$$S_L(i) = \text{máx} [0, (9.75) - \bar{x}_i + S_L(i-1)]$$

Los resultados se muestran en la tabla 2.4. En donde N_H y N_L indican el número de períodos consecutivos en que $S_H(i)$ y $S_L(i)$ dejan de ser cero.

Como se puede observar en la tabla, tanto $S_H(i)$ como $S_L(i)$, nunca llegan a ser mayores que $h=6.8$, por lo que esta tabla CUSUM coincide con la carta CUSUM con iguales características de diseño de la figura 2.7, es decir, que tampoco detecta el cambio de 0.5σ en la media. Este resultado no es sorprendente sino lógico por lo que ya se ha explicado.

Tabla 2.4 CUSUM tabular

Muestra (i)	X_i	$S_H(i)$	N_H	$S_L(i)$	N_L
1	9.45	0	0	0.3	1
2	7.99	0	0	2.06	2
3	9.29	0	0	2.52	3
4	11.66	1.41	1	0.61	4
5	12.16	3.32	2	0	0
6	10.18	3.25	3	0	0
7	8.04	1.04	4	1.71	1
8	11.46	2.25	5	0	0
9	9.2	1.2	6	0.55	1
10	10.34	1.29	7	0	0
11	9.03	0.07	8	0.72	1
12	11.47	1.29	9	0	0
13	10.51	1.55	10	0	0
14	9.4	0.7	11	0.35	1
15	10.08	0.53	12	0.02	2
16	9.37	0	0	0.4	3
17	10.62	0.37	1	0	0
18	10.31	0.43	2	0	0
19	8.52	0	0	1.23	1
20	10.84	0.59	1	0.14	2
21	10.4	0.74	2	0	0
22	8.83	0	0	0.92	1
23	11.79	1.54	1	0	0
24	11	2.29	2	0	0
25	10.1	2.14	3	0	0
26	10.58	2.47	4	0	0
27	9.88	2.1	5	0	0
28	11.12	2.97	6	0	0
29	10.81	3.53	7	0	0
30	10.02	3.3	8	0	0

4.2.11 Duncan (1991).

Duncan (1991) da un ejemplo gráfico muy poco objetivo sobre la ventaja de las cartas CUSUM sobre la carta p de Shewhart . El ejemplo consiste en la extracción de muestras de 100 bolas de una caja que contiene 5% de bolas rojas. Se establece una carta p con límites 3σ , y se realizan 20 extracciones de muestras de la caja obteniéndose las siguientes cartas p y CUSUM de las figuras 4.8 y 4.9, respectivamente.

Figura 4.8 Carta p para la fracción de bolas rojas extraídas

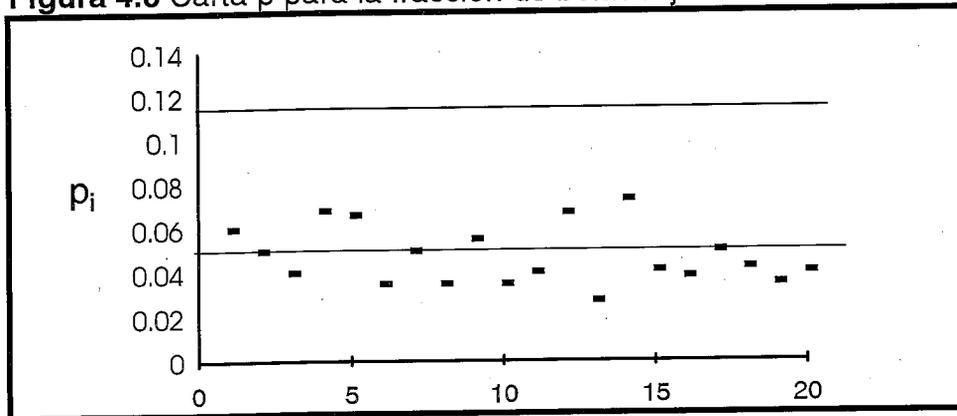
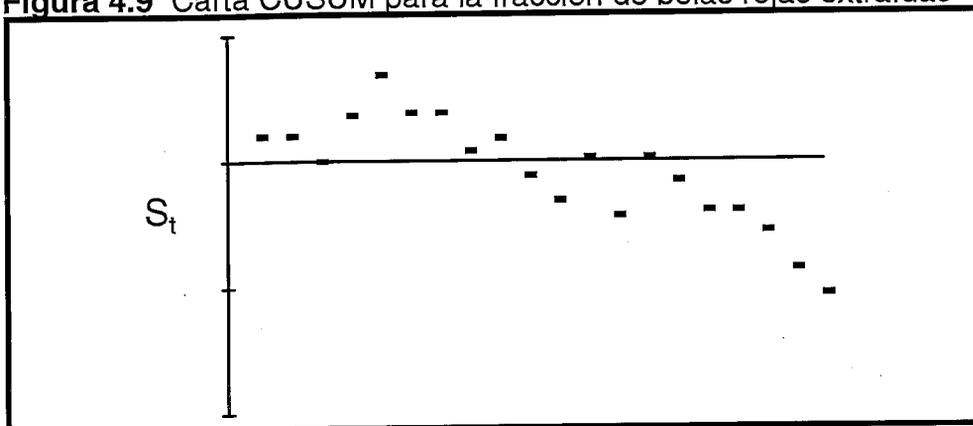


Figura 4.9 Carta CUSUM para la fracción de bolas rojas extraídas



En la carta p no se observa ningún comportamiento fuera de lo normal y en la carta CUSUM existe una tendencia negativa, que el texto justifica diciendo que existió un sesgo en el muestreo, por lo cual la carta se toma como buena, es decir, los puntos nos muestran un proceso en control. El siguiente paso del ejemplo consiste en añadir una pequeña cantidad de bolas rojas a la caja y se toman otras 20 muestras, con las cuales se obtienen las siguientes cartas de control.

Figura 4.10 Carta p con las 40 muestras

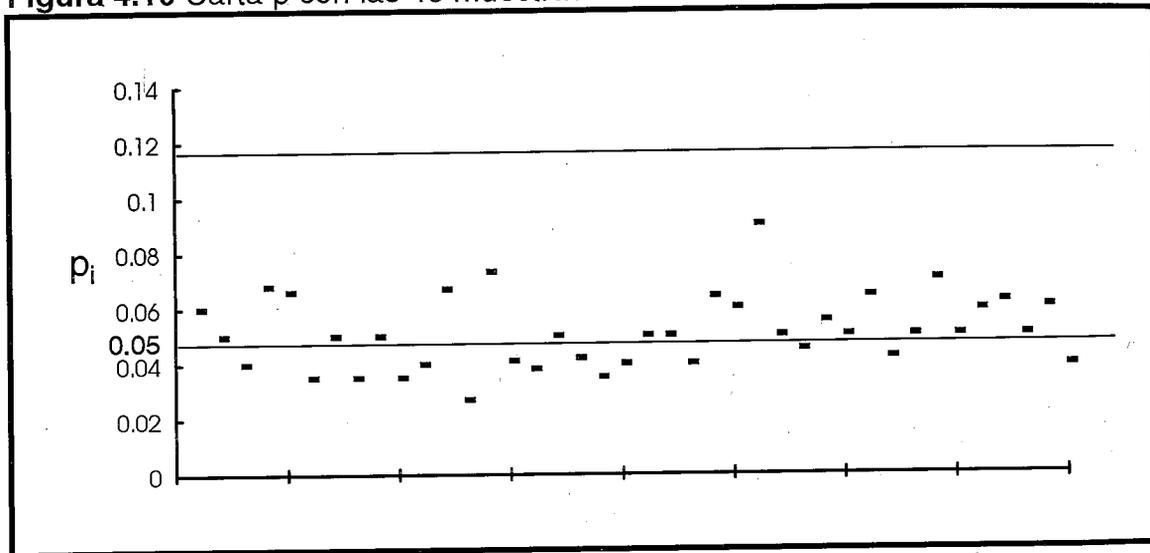
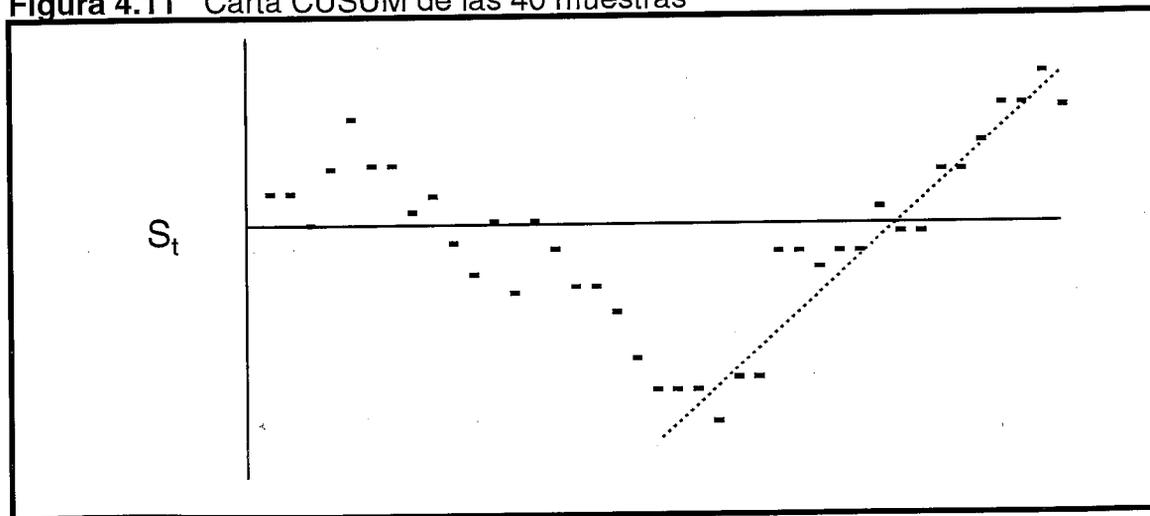


Figura 4.11 Carta CUSUM de las 40 muestras



La figura 4.10 muestra la carta p, la cual nos refleja un proceso en control, queriendo decir que no fue sensible al aumento de bolas rojas. La figura 4.11 sí refleja el aumento de bolas rojas, tal como se puede apreciar en la figura 4.11, pero resulta subjetivo el criterio a seguir para determinar en que momento podemos decir de una carta CUSUM como ésta, que el proceso se a salido de control, o en este caso que el porcentaje de bolas rojas a aumentado.

Para ello necesitamos construir la máscara V, para lo cual Duncan habla de los parámetros necesarios para su construcción, d y θ , y define las ecuaciones 4.4 y 4.5 para su obtención.

$$k_1 - \bar{X}'' = \bar{X}'' - k_2 = w \tan \theta \quad 4.4$$

$$h = d \tan \theta = \frac{d(k_1 - \bar{X}'')}{w} \quad 4.5$$

en donde:

- k_1 = Valor de referencia superior
- k_2 = Valor de referencia inferior
- w = Factor de escala de la gráfica
- \bar{X}'' = Valor objetivo o media del proceso
- h = Intervalo de decisión

En el texto no se da ningún ejemplo de la construcción de una carta CUSUM con las ecuaciones anteriores, por lo que tampoco se hace la comparación gráfica con una carta Shewhart equivalente.

Algo importante que menciona Duncan es el hecho de que para poder comparar una carta CUSUM con una carta Shewhart, ambas deben de tener la misma longitud de corrida promedio (ARL).

Recordemos que cuando un proceso se sale de control con un brinco de $\delta\sigma$, la carta no detecta el cambio inmediatamente, sino que pasa un tiempo en el cual se toma un número determinado de muestras que se grafican en la carta. A este número de muestras tomadas desde el momento de la salida de control hasta el de la detección se llama ARL y se identifica como L_s . Cuando el proceso se encuentra en control también existen puntos que la carta detecta como salidas de control sin serlo y se conocen como falsas alarmas, ya que son debidas al comportamiento normal del proceso. El número de muestras tomadas entre cada falsa alarma es el ARL y en este caso específico de un proceso en control se le identifica como L_0 .

CAPITULO V

RESUMEN Y CONCLUSIONES

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo se dan las conclusiones que dejan bien definido el uso que se debe dar a las cartas CUSUM: cuando y para qué deben de utilizarse, cuales son sus ventajas y sus desventajas. Se elabora un resumen que muestra de una forma práctica y rápida la técnica de construcción de las cartas CUSUM, de tal manera que sea accesible al personal técnico de cualquier empresa que desee conocerla y/o implementarla.

5.2 SELECCION DE LA CARTA DE CONTROL.

Cuando trabajamos con un proceso, y es nuestro deseo el implementar un control estadístico en el mismo, necesitaremos hacer uso de al menos una carta de control. Se deberá seleccionar entre las diferentes cartas de control y eso dependerá

tanto del tipo de la característica de calidad que se quiera controlar, como de la magnitud del cambio que se desee detectar.

El tipo de característica de calidad puede, ser una variable o un atributo, y el cambio se considera pequeño si este es menor o igual a $2.0\sigma_{\bar{x}}$ y grande si es mayor de $2.0\sigma_{\bar{x}}$.

Como guía para la selección de una carta de control se presentan las figuras 5.1 y 5.2. En la primera se muestran las cartas Shewhart las cuales son apropiadas para detectar cambios grandes en el nivel medio del proceso del proceso. En la segunda se presentan las cartas apropiadas para detectar cambios pequeños del proceso.

Si el interés es detectar cambios grandes del proceso, porque tal vez el centrarnos en detectar cambios pequeños resulte muy costoso y/o innecesario, será apropiado el uso de una de carta Shewhart de la figura 5.1.

Pero si es necesario detectar cambios pequeños en nuestro proceso deberemos utilizar una carta con buena sensibilidad a los mismos, seleccionándola de la figura 5.2. Dentro de éstas se encuentran las cartas CUSUM. Existen dos formas para su elaboración: la carta con máscara-V y la carta tabular numérica.

La carta CUSUM numérica ó tabular se recomienda para el control automatizado de procesos continuos, ya que es un algoritmo sencillo el que deberá programarse en el proceso.

La carta CUSUM máscara-V se recomienda para su uso en el control estadístico de procesos realizado por el personal de operación, ya que puede ayudar a visualizar de una mejor manera el comportamiento del proceso debido a que se trata de una herramienta gráfica.

Figura 5.1 Cartas para cambios grandes.

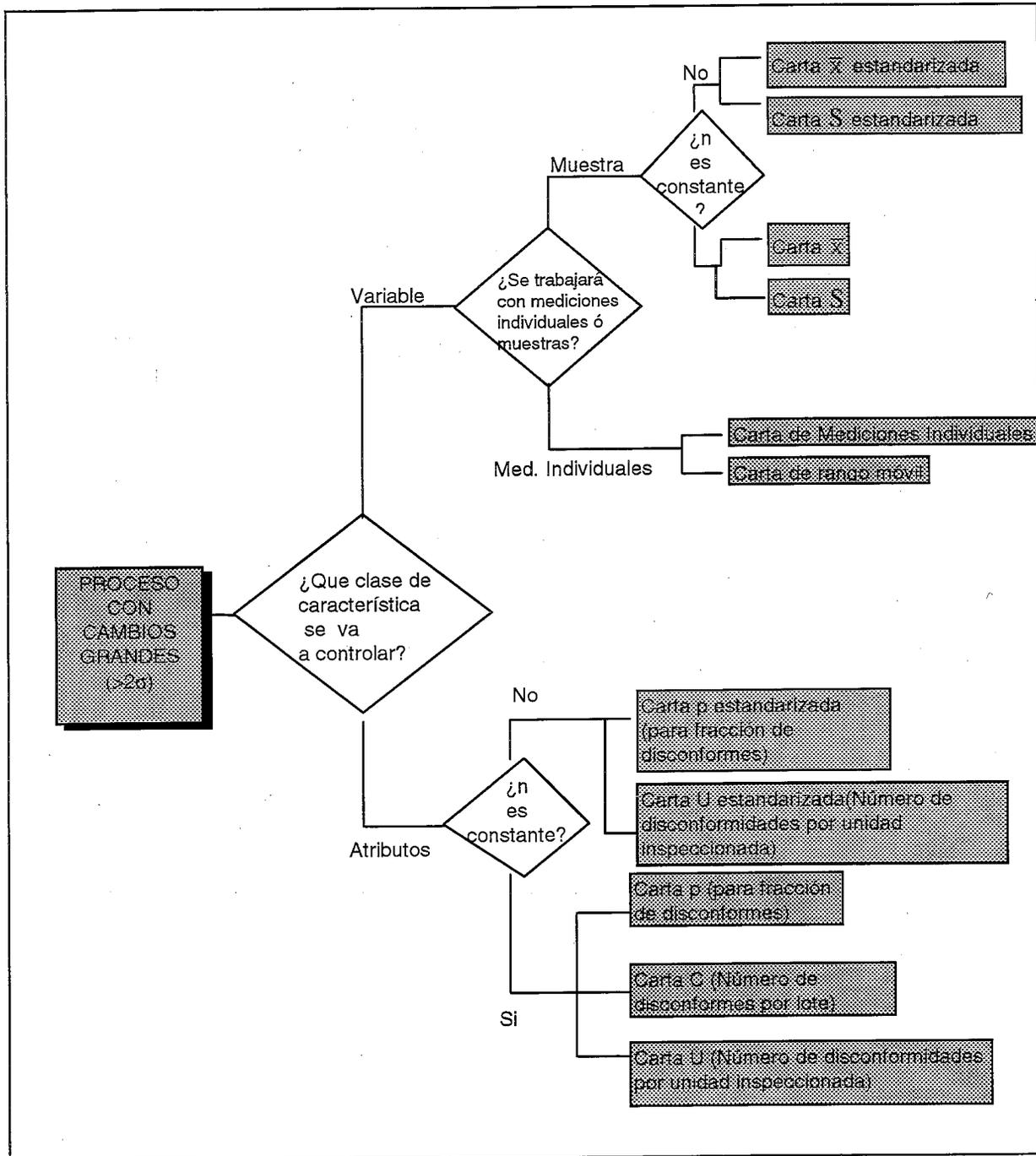
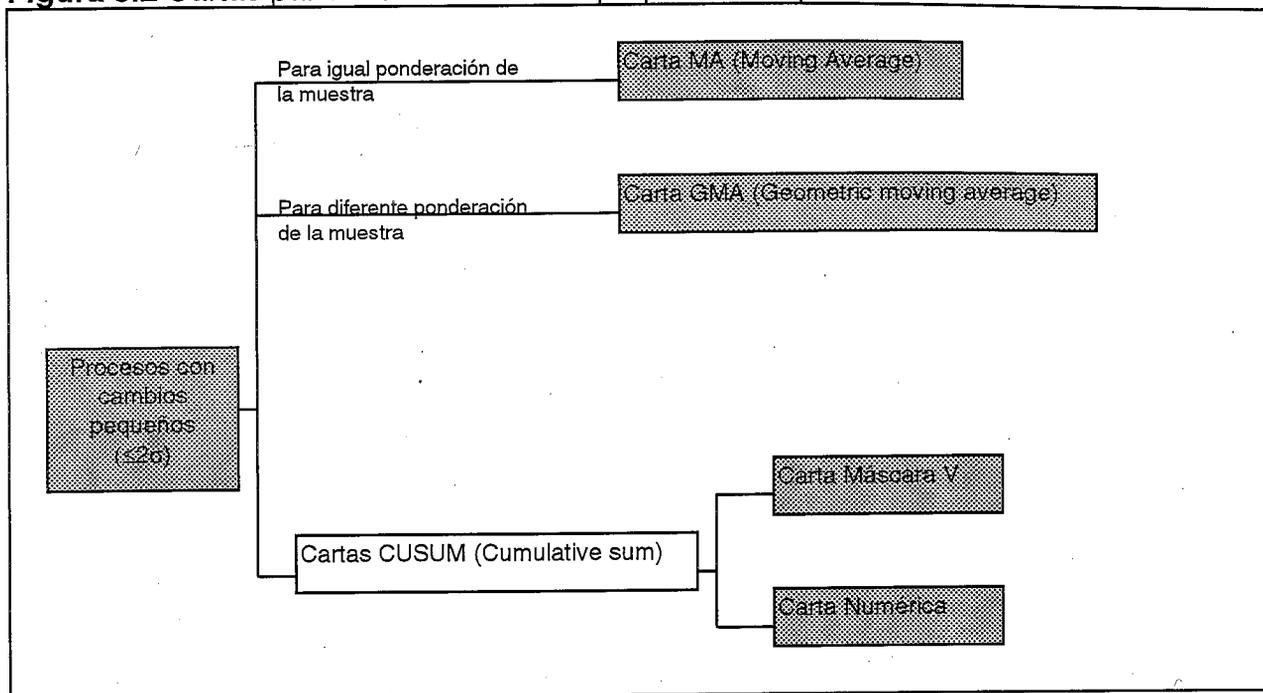


Figura 5.2 Cartas para detectar cambios pequeños del proceso.

5.3 CARACTERISTICAS DE LAS CARTAS CUSUM

Las cartas CUSUM al igual que las cartas Shewhart no son adecuadas para cualquier tipo de proceso, presentan desventajas y ventajas en su uso.

5.3.1 Ventajas de las cartas CUSUM

- Poseen una buena sensibilidad para detectar cambios pequeños en la media del proceso, cambios menores de 2σ .

- Es fácil detectar el momento en el cual sucedió el cambio en la media del proceso al analizar los puntos graficados y encontrar el momento en que la pendiente empezó a cambiar.

5.3.2 Desventajas de las cartas CUSUM

- Tienen una sensibilidad menor que las cartas Shewhart para detectar cambios grandes en la media del proceso, es decir cambios mayores de 2σ .
- La construcción de la máscara-V puede resultar complicada por la presencia del factor de escala gráfica w .
- La anterior desventaja puede eliminarse utilizando una carta CUSUM numérica, pero entonces aparecerá el inconveniente de que por tratarse de una tabla numérica, pierde las propiedades ilustrativas que tiene una gráfica.

5.4 CONSTRUCCION DE LA CARTAS CUSUM

Observando las recomendaciones de autores tales como Page (1961), Ewan (1963), Bowker y Lieberman (1972), Lucas (1976), y Duncan (1991), queda claro que para la construcción de una carta CUSUM, debe de empezar por definirse el ARL con el cual se quiere que trabaje la misma. La metodología de su construcción propuesta en este trabajo toma en cuenta el ARL de la carta, y se encuentra en la sección 2.4.2. En el capítulo III se encuentran ejemplos de su construcción y aplicación.

5.5 CONCLUSIONES GENERALES.

En nuestro país el uso de las cartas CUSUM es, sino nulo, si reducido, por lo que es muy importante que se tenga en cuenta su posible uso, dependiendo desde luego del proceso que se desee controlar.

Para su diseño y construcción se puede seguir la metodología planteada en la sección 2.4.2 de este trabajo. Siempre que se emplee la carta CUSUM no debe de olvidarse que su buena sensibilidad se da en la detección de desviaciones de la media del proceso de magnitud de 0.5σ a 2.0σ . Y para cambios mayores a 2.0σ , se deben de emplear cartas Shewhart, las cuales dentro de este rango, tienen una mejor sensibilidad a la detección de los cambios. Tómense como guías las figuras 5.1 y 5.2.

Si se requiere la implementación de la carta CUSUM en procesos automatizados, es más conveniente la implantación de la carta CUSUM numérica, ya que es un algoritmo sencillo que se implementará en el sistema computarizado del proceso.

Se debe mencionar que Lucas (1973) ha desarrollado una carta CUSUM modificada con el nombre de **carta truncada**, la cual tiene la propiedad de las cartas Shewhart de detectar con buena sensibilidad los cambios grandes en el proceso y tiene también la característica de las cartas CUSUM de tener buena sensibilidad para detectar los cambios pequeños del proceso. Las cartas truncadas son entonces una herramienta útil cuando se desea tener una carta con ambas características.

Si en apariencia estas cartas que combinan las características de las cartas \bar{x} y CUSUM son las más apropiadas para cualquier tipo de proceso, en realidad no es así pues existen procesos industriales en los cuales el detectar los cambios pequeños del proceso resultaría en un costo excesivo del mismo. Por ello las cartas truncadas son

apropiadas en los procesos que el ingeniero desea detectar cambios grandes y pequeños.

BIBLIOGRAFIA

- Barnard, G. A.;1959; CONTROL CHARTS AND STOCHASTIC PROCESSES; Journal of the Royal Statistical Society; Vol. XXI; No. 2.
- Bowker, Albert H; Lieberman, Gerald J.;1972; ENGINEERING STATISTICS; Second Edition; Prentice-Hall; USA.
- Champ, Charles W.; Woodall William H.;1987; EXACT RESULTS FOR SHEWHART CONTROL CHARTS WHIT SUPPLEMENTARY RUNS RULES; Technometrics; Vol. 29; No.4; 393-399.
- Duncan, Acheson J.;1989; CONTROL DE CALIDAD Y ESTADÍSTICA INDUSTRIAL; Alfaomega.
- Ewan, W. D.;1963; WHEN AND HOW TO USE CU-SUM CHARTS; Technometrics; Vol. 5 ; No.1; 1-22.
- Feigenbaum; 1983; TOTAL QUALITY CONTROL; Third Edition; Mc Graw Hill; USA.
- Goldsmith, P.L.; Whitfield, H.;1961; AVERAGE RUN LENGTHS IN CUMULATIVE CHART QUALITY CONTROL SCHEMES; Technometrics; Vol 3; No. 1; 11-20.

- Hurley Dennis, Landeros José; 1985; CONTROL DE CALIDAD; Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.
- Jhon, Peter; 1990; STATISTICAL METHODS IN ENGINEERING AND QUALITY ASSURANCE; Wiley; USA.
- Juran, J.M.; Gryna, Frank, M; 1988; JURAN'S QUALITY CONTROL HANDBOOK; Fourth edition; McGraw-Hill; Singapur.
- Lucas, James M.; 1976; A MODIFIED "v" MASK CONTROL SCHEME; Technometrics; Vol. 15; No. 4. 833-844.
- Lucas, James M.; 1976; THE DESIGN AND USE OF V-MASK CONTROL SCHEMES; Journal of Quality Technology; Vol. 8; No. 1. 1-12.
- Montgomery, D.C.; 1991; INTRODUCTION TO STATISTICAL QUALITY CONTROL; Second edition; Wiley; Singapur.
- Nelson, Lloyd S; 1984; THE SHEWHART CONTROL CHART- TEST FOR SPECIAL CAUSES; Journal of Quality Technology; Vol. 16; No. 4. 237-239.
- Page, E.S.; 1954; CONTINUOUS INSPECTION SCHEMES; Biometrika; Vol.41; 100-114.
- Page, E.S.; 1961; CUMULATIVE SUM CHARTS; Technometrics; Vol. 3; No. 1; 1-9.
- Scherkenbach, W.W.; 1992; LA RUTA DEMING A LA CALIDAD Y LA PRODUCTIVIDAD; CECSA.

- Shewhart Walter A.; 1931; OMIC CONTROL OF QUALITY OF MANUFACTURED PRODUCT; D. Van Nostrand & Co., Inc.
- Wadsworth, Harrison M.; Stephens, Kenneth S.; Godfrey A. Blanton; 1986; MODERN METHODS FOR QUALITY CONTROL AND IMPROVEMENT; Wiley; USA.
- Western Electric; (1956); STATISTICAL QUALITY CONTROL HANDBOOK; American Telephone and Telegraph, Chicago, IL.
- Wheeler, Donald J.; 1983; DETECTING A SHIFT IN PROCESS AVERAGE: TABLES OF THE POWER FUNTION FOR \bar{x} CHARTS; Journal of Quality Technology; Vol 15, No. 4; 155-169.
- Woodall, William H.; 1986; THE DESIGN OF CUSUM QUALITY CONTROL CHARTS; Journal of Quality Technology; Vol. 18; NO. 2; 99 - 102.
- Yashchin E.; 1992; ANALYSIS OF CUSUM AND OTHER MARKOV-TYPE CONTROL SCHEMES BY USING EMPIRICAL DISTRIBUTIONS; Technometrics; Vol 34 No. 1; 54-63.